Metric Spaces

3rd year degree honours course

Dr. Arnab Chakraborty

Associate Professor
Indian Statistical Institute, Kolkata

Formerly

Guest Faculty
Ramakrishna Mission Vidyamandira, Belur

◇

Guest Faculty
Ramakrishna Vivekananda University, Belur

◇

Assistant Professor
St. Xavier's College, Kolkata

Levant Publications
18-B, Shyamacharan De Street
Kolkata 700 073

সূচী

ছাত্রছাত্রীদের প্রতি

Metric space-এর বইয়ে দ্বিতীয় সংস্করণ এটা। নতুন CBCS সিলেবাস অনুসারে লেখা। এই সিলেবাসে metric space-এর পরিসর আগের থেকে অনেকটাই বেশী। তাই বইটাও অনেক মোটা করতে হয়েছে। অবশ্য আমাদের "বাংলায়-বোঝানো-ইংরাজী-বই" সিরিজের মূল উদ্দেশ্য এখানেও একই-- সেই সব ছাত্রছাত্রীদের কাছে অংক পৌঁছে দেওয়া যারা ইংরাজী মাধ্যমে পড়ছ, কিন্তু ইংরাজীর চেয়ে যাদের বাংলা বুঝতে বেশী সুবিধা হয়। এই বইগুলোতে যাবতীয় technical term ইত্যাদি ইংরাজীতেই লেখা, উত্তরগুলোও তাই। শুধু বোঝানো অংশটুকু বাংলায়।

যাদের ইংরাজী বুঝতে অসুবিধা হয় না, তারাও অনেক সময়ে বুঝতে পারো না যে একটা অংকের উত্তর কি করে ইংরাজীতে লিখতে হয়। অংক লেখার ইংরাজী আর সাধারণ ইংরাজী ঠিক এক জিনিস নয়। কি করে একটা উত্তর ইংরাজীতে গুছিয়ে লিখতে হয় সেটা এই বইতে handwriting-এর মত লিখে দেখানো আছে।

আমাদের এই সিরিজের সব বইতেই প্রচুর ছবি দেওয়া থাকে, এই বইটাও তার ব্যতিক্রম নয়। একটা অংকের উত্তর জানা থাকলে লিখে ফেলা কঠিন নয়। কঠিন হল উত্তরটা নিজে নিজে ভেবে বার করা। ছবিগুলো এই কাজে অপরিহার্য। এই সিরিজের অন্যতম উদ্দেশ্য হল তোমাকে ছবি এঁকে অংক করতে উৎসাহিত করা। অংক করার সময়ে যত পারবে ছবি আঁকবে, এমন কি পরীক্ষার খাতাতেও। ওতে সময় নষ্ট হয় না, বরং সময় বাঁচে।

গত আট বছরের প্রশ্নগুলো নিয়েছি বাজারে প্রচলিত সংকলন থেকে। তাই সেই সব প্রশ্নে ভুল থাকলে তার কতটা দায় প্রশ্নকর্তার আর কতটা সংকলনকারীর, সেটা বলতে পারব না। এই বইটাকে যথাসম্ভব ত্রুটিমুক্ত রাখতে চেষ্টা করেছি। তাও কিছু ভুল থেকে যাওয়া অসম্ভব নয়। কোনো ভুলের সন্ধান পেলে, বা অন্য কারণে যোগাযোগ করতে চাইলে ইমেইল (arnabc74@gmail.com) বা ফোন (9231542600) ব্যবহার করতে পারো। ওই একই নম্বরে Whatsapp-ও করতে পারো।

অর্ণব চক্রবর্তী

Chapter I
Metric spaces

DAY 1
কত দূর, আর কত দূর...

এই বইতে আমরা metric space বলে একটা ব্যাপার শিখব। জিনিসটা কী সেটা প্রথমে ছবি দিয়ে বুঝে নেওয়া যাক। Fig 1-এ একটা রাস্তার এক প্রান্তের ছবি দেখা যাচ্ছে। প্রান্তটা বেড়া দিয়ে আটকানো, এবং রাস্তার মাঝ বরাবরও খানিকটা বেড়া রয়েছে। রাস্তার দুই ধারে মুখোমুখি দুটো বিন্দু রয়েছে A আর B. যদি ওদের মধ্যে দূরত্ব মাপতে বলি, কী করে মাপবে?

- এর একটা সহজ উত্তর হল A আর B-কে যোগ করলে যে সরলরেখাটা পাওয়া যায়, তার দৈর্ঘ্য। Fig 1-এ এটা ড্যাশ্ ড্যাশ্ দিয়ে দেখানো হয়েছে।
- এবার মনে করো একজন লোক পায় হেঁটে A থেকে B-তে যেতে চায়। তাকে কত দূরত্ব অতিক্রম করতে হবে? এবার কিন্তু উত্তরটা আর AB সরলরেখার দৈর্ঘ্য হবে না, কারণ লোকটা তো আর বেড়া ভেদ করে চলে যেতে পারে না। তাকে বেড়ার ফাঁকটা দিয়ে যেতে হবে, ফলে দূরত্বটা হবে Fig 2-তে দেখানো পথের দৈর্ঘ্যটা।
- কিন্তু যদি সেই একই লোক গাড়ি করে A থেকে B-তে যেতে চায়? গাড়ি ওই ছোটো ফাঁক দিয়ে ঢুকবে না, তাই তাকে বেড়া পার করে গাড়ি ঘোরাতে হবে, ফলে এবার দূরত্বটা আরও বাড়বে, Fig 3-এর মত।

সুতরাং লক্ষ কর যে, সেই একই A আর B-এর মধ্যে দূরত্ব বিভিন্ন পরিস্থিতিতে বিভিন্ন রকম হচ্ছে। দূরত্ব মানে যেন একটা point থেকে আরেকটা point-এ যেতে <u>সবচেয়ে কম</u> কতটা কষ্ট করতে হবে, তার পরিমাপ। কোন্ পরিস্থিতিতে কীসে কষ্ট, তার উপর নির্ভর করে তাই দূরত্বও পরিবর্তিত হয়। অংকের ভাষায় এই দূরত্বেরই নাম হল **metric** (মেট্রিক)[1] সরলরেখা বরাবর যে দূরত্বটা মেপেছিলাম সেটা ছিল জ্যামিতিক দূরত্ব, যার আরেক নাম **Euclidean metric**. অনেকে ইংরাজীতে বলে "**usual metric**" (অর্থাৎ "এমনি দূরত্ব")। যদি এই দূরত্বকে d_1 চিহ্ন দিয়ে বোঝাই, তবে AB সরলরেখার দৈর্ঘ্যকে লিখব $d_1(A,B)$. তেমনি, পায়-হাঁটা দূরত্বকে আমরা d_2 দিয়ে বোঝালে A,B-র পায়-হাঁটা দূরত্ব হবে $d_2(A,B)$. একইভাবে গাড়ির হিসেবে দূরত্বটা হবে আরেকটা metric, যার নাম দিতে পারি d_3.

[1] সাবধান, উচ্চারণটা কিন্তু ম্যাট্রিক নয়! Matric (ম্যাট্রিক) বলেও একটা শব্দ অংকের ভাষায় আছে, তার অর্থ সম্পূর্ণ অন্য--"matrix-সম্পর্কীয়"।

Fig 1

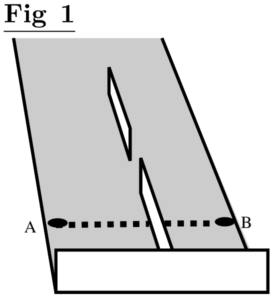


Fig 2

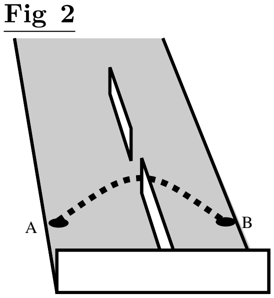
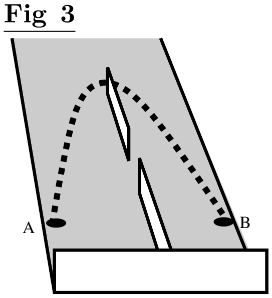


Fig 3



Example 1: বল তো $d_1(A, A)$ কত হবে? আর $d_2(A, A)$ এবং $d_3(A, A)$-ই বা কত হবে?

SOLUTION: A থেকে A পর্যন্ত Euclidean দূরত্ব (মানে জ্যামিতিক দূরত্ব) তো 0. আর হেঁটে যেতেও 0 দূরত্বই যেতে হয়। তাই $d_2(A, A) = 0$. একই যুক্তিতে $d_3(A, A) = 0$. ■

Example 2: কোনটা বেশী বড়? $d_1(A, B)$ নাকি $d_1(B, A)$? একই প্রশ্ন যদি d_2 বা d_3-কে নিয়ে করতাম?

SOLUTION: যে পথে যাওয়া যায়, সে পথে ফেরাও যায়। তাই $d_1(A, B) = d_1(B, A)$. একইভাবে $d_2(A, B) = d_2(B, A)$ এবং $d_3(A, B) = d_3(B, A)$. অবশ্য কিছু কিছু রাস্তা থাকে one-way, সেখান দিয়ে গাড়ি খালি এক দিকেই যেতে পারে। সেক্ষেত্রে "যে পথে যাওয়া যায় সে পথে ফেরাও যায়" কথাটা ঠিক নয়। কিন্তু metric নিয়ে আলোচনা করার সময়ে আমরা সেরকম one-way জিনিস নিয়ে কখনও কাজ করি না। ■

তাহলে আমরা শিখলাম যে, metric মানে দূরত্ব, কিন্তু দূরত্ব বলতে যে খালি জ্যামিতিক দূরত্বই বোঝানো হচ্ছে এমন নয়। একটা point থেকে আরেকটা point-এ পৌঁছতে সবচেয়ে কম কতটা কষ্ট করতে হয়, দূরত্ব বলতে সেটাই বোঝাচ্ছে। আরেকটা উদাহরণ দেখি।

Example 3: ধরো চারটে গ্রাম আছে A, B, C আর D. তাদের মধ্যে যোগাযোগের পথগুলো দেখিয়েছি Fig 4-এ।

প্রত্যেকটা পথের পাশে একটা সংখ্যা লেখা আছে, সেটা হল ওই পথে যাতায়াত করার ভাড়া। এক্ষেত্রে যাতায়াতের কষ্ট মাপব মোট খরচা দিয়ে। যেমন ধরো A থেকে B-তে যেতে সবচেয়ে কম খরচা কত পড়বে?
SOLUTION: যদি সরাসরি যাও, তবে 5 টাকা। কিন্তু যদি C হয়ে যাও, তবে $2 + 2 = 4$ টাকা। যদি D হয়ে যাও, তবে $4 + 2 = 6$ টাকা। তার মানে সবচেয়ে কম খরচা লাগছে 4 টাকা। তাই আমরা বলব $d(A, B) = 4$. ■

একইভাবে আমরা যেকোনো গ্রাম x থেকে যেকোনো গ্রাম y-এর "দূরত্ব" $d(x, y)$ বার করতে পারি। Fig 5-এ যাবতীয় দূরত্বের তালিকাটা দিয়েছি।
লক্ষ কর যে, যদি সবগুলো গ্রামের set-টাকে X নাম দিই, মানে $X = \{A, B, C, D\}$ নিই, তবে d হল $X \times X$ থেকে $\mathbb{R}$-এ একটা function. মনে আছে নিশ্চয়ই যে, $X \times X$ মানে হল $(A, B), (A, C), (D, B)$ ইত্যাদি যতভাবে জোড়া নেওয়া যায়, তাদের set. এর মধ্যে $(A, A), (B, B)$ জাতীয় জোড়ারাও পড়বে। আর একটা জোড়ার মধ্যে কে আগে কে পরে, সেটা গুরুত্বপূর্ণ, যেমন (A, B) এবং (B, A) কিন্তু জোড়া হিসেবে আলাদা।
ধরো X যেকোনো একটা nonempty set. যদি এর বিভিন্ন element-গুলোর মধ্যে "দূরত্ব" মাপতে চাই, তবে একটা metric পাব, যেটাকে এরকম একটা function হিসেবে লেখা যায়, $d : X \times X \to \mathbb{R}$. যে কোনো function দিয়েই কিন্তু "দূরত্ব" মাপা চলে না। বুঝতেই পারছ, এর জন্য d-কে কিছু শর্ত পালন করতে হবে--

- একটা শর্ত হল $d(x, y) \geq 0$ হতে হবে, কারণ দূরত্ব কখনও < 0 হয় না।
- কোনো জায়গায় গ্যাঁট হয়ে বসে থাকার জন্য পরিশ্রম করতে হয় না। তাই নীচের শর্তটা পালিত হতে বাধ্য--

$$\forall x \in X \quad d(x, x) = 0.$$

Fig 4

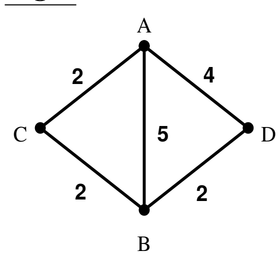


Fig 5

	A	B	C	D
A	0	4	2	4
B	4	0	2	2
C	2	2	0	4
D	4	2	4	0

- কিন্তু সামান্য একটু নড়াচড়া করতে হলেই খানিকটা কষ্ট করতেই হয়, তাই $x \neq y$ হলে $d(x,y) > 0$ হবেই।
- আর বলেই নিয়েছি যে, কোনো one-way ব্যাপারে আমরা নেই। তাই x থেকে y-তে যেতেও যত কষ্ট, y থেকে x-এ ফিরতেও ঠিক ততটাই। সুতরাং
$$\forall x, y \in X \quad d(x,y) = d(y,x).$$

এই শর্তগুলো এমনিতেই বোঝা যায়। কিন্তু এছাড়াও আরেকটা সূক্ষ্ম শর্ত আছে, যেটা নীচের উদাহরণটা দেখলে বুঝতে পারবে।

Example 4: একটা বাসের রুটে যত স্টপেজ আছে, তাদের set-টাকে X বলব। যদি $x, y \in X$ দুটো স্টপেজ হয়, তবে $d(x,y)$ হল x থেকে y পর্যন্ত যেতে বাস ভাড়া। ধরো x, y আর z হল তিনটে স্টপেজ। যাদের মধ্যে ভাড়া এইরকম--

$$d(x,y) = 5, \quad d(y,z) = 5, \quad d(x,z) = 15,$$

মানে x থেকে y-তে যেতে (বা y থেকে x-এ যেতে) 5 টাকা ভাড়া, ইত্যাদি। বলতে পারো কেন ভাড়ার এই ব্যবস্থা চলতে পারে না?

SOLUTION: যারা x থেকে z-এ যাবে, তারা কেউ 15 টাকা দিয়ে টিকিট কাটবেই না, খালি x থেকে y পর্যন্ত টিকিট কাটবে 5 টাকা দিয়ে। y এলে ফের 5 টাকা দিয়ে z অব্দি টিকিট কেটে নেবে। তাতে 15 টাকার জায়গায় মোটে $5 + 5 = 10$ টাকাতেই হয়ে যাবে। ■

এই উদাহরণ থেকেই বুঝতে পারছ যে ভাড়ার তালিকাটা এমন করতেই হবে, যাতে এইভাবে ভেঙে ভেঙে টিকিট কাটলে লোকে বাড়তি সুবিধা পেয়ে না যায়, তাই সর্বদাই

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

হতে হবে, অর্থাৎ x থেকে z-এ যাওয়াটা y-তে ভেঙে নিলে যেন কোনো বাড়তি সুবিধা না পাওয়া যায়।
এইটাকে বলে **triangle inequality**. আমরা আগেই বলেছি যে metric হল একটা point থেকে আরেকটা point-এ যাবার জন্য সবচেয়ে কম কষ্ট। এই "সবচেয়ে কম"-এর ব্যাপারটার জন্যই triangle inequality প্রয়োজন। x থেকে z-এ যেতে সবচেয়ে কম কষ্ট যখন বলেছি $d(x,z)$, তার মানে কোনো y দিয়ে ঘুরে গেলে কষ্ট আরও কমানো অসম্ভব।
এই সব আলোচনার নির্যাসটুকু নিয়েই metric-এর সংজ্ঞা তৈরী হয়, যেটা চেয়েছে নীচের অংকটায়।

Example 5: Define a metric on a set X.[2] **(2006.11a(part 1))**

SOLUTION:

> DEFINITION: **Metric**
>
> By a metric on a nonempty set X we mean a function $d : X \times X \to \mathbb{R}$ such that
>
> 1. $\forall x, y \in X \quad d(x,y) \geq 0$, and $d(x,y) = 0$ iff $x = y$,
> 2. symmetry: $\forall x, y \in X \quad d(x,y) = d(y,x)$,
> 3. triangle inequality: $\forall x, y, z \in X \quad d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

■

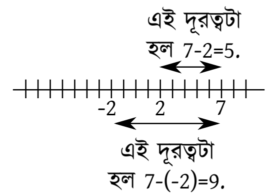


Fig 6

লক্ষ কর, যে set X-এর উপর আমরা metric নিয়ে কাজ করতে চাই, সেটাকে nonempty হতে হবে। একটা nonempty set X এবং তার উপর একটা metric d, এই দুজনকে একসঙ্গে বলে একটা **metric space**. লেখার সময়ে লিখি (X, d). সবসময়ে set-টাকে আগে লিখে metric-টাকে পরে লেখা হয়।
আমরা নানা রকম metric-এর কথা শিখব। তাদের মধ্যে কয়েকটা বহুল-ব্যবহৃত, কয়েকটা খালি অংকের কসরৎ। কিন্তু দুটো metric আছে, যাদের চেয়ে সহজ আর কিছু হয় না। প্রথমটা হল $\mathbb{R}$-এর উপরে Euclidean metric, অর্থাৎ জ্যামিতিক দূরত্ব। নীচের অংকটা সেইটা নিয়েই।

Example 6: Fig 6-এ $\mathbb{R}$-কে একটা লম্বা লাইনের মত করে দেখিয়েছি। এই লাইন বরাবর দুটো বিন্দু নিলাম 2 আর 7.

এদের মধ্যে দূরত্ব হল $7 - 2 = 5$. যদি বিন্দু দুটো -2 আর 7 নিতাম, তবে দূরত্বটা হত $7 - (-2) = 9$. অর্থাৎ দূরত্বটা সবসময়েই পাওয়া যায় বড় সংখ্যাটা থেকে ছোটো সংখ্যাটা বিয়োগ করলে। যদি সংখ্যা দুটো x আর y নিতাম, তবে কোনটা বড় কোনটা ছোটো বোঝা যাচ্ছে না, তাই তখন ওদের দূরত্বটাকে নেব $d(x, y) = |x - y|$. এখানে absolute value নেওয়ার ফলে কে বড় কে ছোটো তা নিয়ে মাথা ঘামাতে হচ্ছে না। এটাই হল $\mathbb{R}$-এর উপর Euclidean metric-এর ফর্মুলা। ■

এবার আরেকটা সহজ metric-এর কথা শিখব, যার নাম **discrete metric**. এটা যে কোনো nonempty set-এর উপরেই হতে পারে। এর সংজ্ঞাটা এইরকম--

> DEFINITION: **Discrete metric**
>
> Let X be any nonempty set. Then the <u>discrete metric</u> on X is defined as
>
> $$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{if } x = y \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Exercise 1: পরীক্ষা করে দ্যাখো যে, এই metric-টা সত্যিই একটা metric, মানে metric-এর সংজ্ঞার তিনটে শর্তই পালন করে। ■

এইটাকে মনে করতে পারো স্বার্থপরের metric. এখানে কেউ কারো কাছে নেই, সবাই সবার থেকে 1 দূরত্বে বসে আছে। এটা যে metric হবার তিনটে শর্তই পালন করে সেটা তো উপরের অংকটা করতে গিয়েই দেখেছ। এখানে 1-এর কোনো গুরুত্ব নেই, ওই 1-টার জায়গায় হ য ব র ল-র বুড়োটার স্মৃতিতে 26 বসালেও চলত।

আমি ভয়ানক আপত্তি করে বললাম, "এ হতেই পারে না। বুকের মাপও ছাব্বিশ ইঞ্চি, গলাও ছাব্বিশ ইঞ্চি? আমি কি শুওর?" বুড়ো বলল, "বিশ্বাস না হয়, দেখ।"
দেখলাম ফিতের লেখা-টেখা সব উঠে গিয়েছে, খালি ২৬ লেখাটা একটু পড়া যাচ্ছে, তাই বুড়ো যা কিছু মাপে সবই ছাব্বিশ ইঞ্চি হয়ে যায়।

--হ য ব র ল

Triangle inequality নিয়ে একটা কথা বলে আজকের দিনটা শেষ করি। এই inequality-টা যে আমাদের প্রতিদিনকার জীবনের অভিজ্ঞতার সঙ্গে কত সামঞ্জস্যপূর্ণ, সেটা বুঝবে নীচের উদাহরণটা দেখলে।

Example 7: একটা নতুন ফ্ল্যাটের বিজ্ঞাপনে লিখেছে--

> সুবর্ণ সুযোগ! ধর্মতলা থেকে মাত্র 1 কিমি দূরে বাটপাড়িয়া ভুঁইফোড় অ্যাপার্টমেন্ট্স্! আজই বুক করুন। শ্যামবাজার থেকে মাত্র 2 কিমি। বিশদ জানতে কল করুন...

বিজ্ঞাপনটা দেখে কী মনে হচ্ছে? যারা কলকাতার ভূগোলের সঙ্গে পরিচিত নও, তাদের জন্য জানিয়ে রাখি--ধর্মতলা থেকে শ্যামবাজারের দূরত্ব হল 6 কিমি।

SOLUTION: বুঝতেই পারছ বিজ্ঞাপনের কথাটা ঠিক হতে পারে না। কারণ ধর্মতলা আর শ্যামবাজারের দূরত্বই যেখানে 6 কিমি, সেখানে একটা বাড়ি একই সঙ্গে ধর্মতলা থেকে 1 কিমি আর শ্যামবাজার থেকে 2 কিমি হয় কী করে? এই সহজ বুদ্ধির কথাটাই অংকের ভাষায় লিখতে চাইলে triangle inequality লাগবে। যদি বাটপাড়িয়া ভুঁইফোড় অ্যাপার্টমেন্ট্স্-কে b, ধর্মতলাকে x আর শ্যামবাজারকে y বলি, তবে

$$6 = d(x,y) \leq d(x,b) + d(b,y) = 1 + 2,$$

যেটা অসম্ভব। ■

এই উদাহরণের যুক্তিটা অনেক অংকেই ব্যবহৃত হয়।

DAY 2
$\mathbb{R}^n$-এর উপরে বিভিন্ন metric (part 1)

$\mathbb{R}$ মানে কী আমরা জানি। যদি এক জোড়া করে সংখ্যা নিই (x_1, x_2), যেখানে $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, (এখানে $x_1 = x_2$ হলেও আপত্তি নেই), তবে এরকম সব জোড়াদের set-কে বলে $\mathbb{R}^2$, যেটাকে আমরা গ্রাফ কাগজের মত ভাবতে পারি। এখানে প্রতিটা (x_1, x_2) হল গ্রাফ কাগজের উপর একটা বিন্দু। একইভাবে $\mathbb{R}^n$ হল

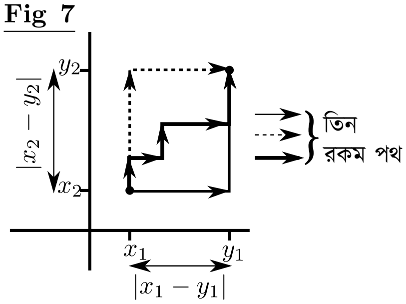
$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, ..., x_n) \ : \ \forall i \quad x_i \in \mathbb{R}\}.$$

এবার আমরা $\mathbb{R}^n$-এর উপর বিভিন্ন metric-এর কথা শিখব।

2.1 L_p metric

ধরো একটা শহর আছে, যেখানে রাস্তাগুলো সব একদম সোজা, হয় উত্তর-দক্ষিণ বরাবর, নয়তো পূর্ব-পশ্চিম বরাবর। সুতরাং যদি শহরটাকে একটা গ্রাফ কাগজের মত ভাবো, তাহলে (x_1, x_2) থেকে (y_1, y_2)-তে যেতে তোমাকে Fig 7-এর মত কোনো পথে যেতে হবে। এই সবগুলো পথেরই দৈর্ঘ্য একই--$|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$. এইটা একটা metric যার নাম হল

Fig 7



L_1 metric. এইরকম নামের কারণ আমরা পরে অনুসন্ধান করব, আপাততঃ নীচের অংকে দেখাতে বলেছে যে এটা সত্যিই একটা metric.

Example 8: Let the function $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ be defined as

$$d(\alpha, \beta) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

for $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$ where $\alpha = (x_1, x_2)$ and $\beta = (y_1, y_2)$. Show that d is a metric on $\mathbb{R}^2$.[5] **(2006.12a)**

SOLUTION: এরকম অংকে সব সময়েই তিনটে ধাপ হয়, কারণ metric-এর সংজ্ঞাটার তিনটে অংশ। একেকটা ধাপে আমরা সংজ্ঞার একেকটা শর্ত পরীক্ষা করব।

Step 1: Shall show that

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^2 \quad d(\alpha, \beta) \geq 0,$ and $d(\alpha, \beta) = 0 \iff \alpha = \beta.$

$\forall\alpha,\beta$ Take any $\alpha = (x_1, x_2)$ and $\beta = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

Then

$$\begin{aligned} d(\alpha, \beta) &= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \\ &\geq 0 + 0 \quad [\because \forall x \in \mathbb{R} \quad |x| \geq 0] \end{aligned}$$

Also,

$$\begin{aligned} d(\alpha, \beta) = 0 &\iff |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = 0 \\ &\iff |x_1 - y_1| = |x_2 - y_2| = 0 \quad [\because \forall x \in \mathbb{R} \quad |x| \geq 0 \quad] \end{aligned}$$

কারণ দুটো nonnegative সংখ্যার যোগফল 0 হলে দুটো সংখ্যাই আলাদা করে 0 হতে বাধ্য।

$$\begin{aligned} &\iff x_1 = y_1 \text{ and } x_2 = y_2 \\ &\iff \alpha = \beta, \end{aligned}$$

as required.

দ্বিতীয় ধাপে symmetry পরীক্ষা করব।

Step 2: Shall show that

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^2 \quad d(\alpha, \beta) = d(\beta, \alpha).$

$\forall\alpha,\beta$ Take any $\alpha = (x_1, x_2)$ and $\beta = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

Then

$$\begin{aligned} d(\alpha, \beta) &= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \\ &= |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| \quad [\because \forall x \in \mathbb{R} \quad |-x| = |x|] \\ &= d(\beta, \alpha), \end{aligned}$$

as required.

এবার তৃতীয় ধাপ, যেখানে triangle inequality পরীক্ষা করে দেখতে হবে। সাধারণতঃ এই ধাপটাই সব চেয়ে কঠিন হয়। এখানে আমরা আমাদের পরিচিত $\mathbb{R}$-এর triangle inequality ব্যবহার করব--

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad |x-y| \leq |x-z| + |z-y|.$$

Step 3: Shall show that

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^2 \quad d(\alpha, \beta) \leq d(\alpha, \gamma) + d(\gamma, \beta).$$

$\forall \alpha, \beta, \gamma$ Take any $\alpha = (x_1, x_2), \beta = (y_1, y_2)$ and $\gamma = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$.

Then

$$\begin{aligned} d(\alpha, \beta) &= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \\ &\leq |x_1 - z_1| + |z_1 - y_1| \\ &\quad + |x_2 - z_2| + |z_2 - y_2| \quad [\text{ by } \Delta\text{-inequality for abs. value}] \\ &= d(\alpha, \gamma) + d(\gamma, \beta), \end{aligned}$$

as required.

■

এই সমাধানটা ভালো করে পড়ে নাও। ঠিক একই কায়দায় নীচের তিনটে অংকও হবে। যদি এই তিনটে অংক করে ফেলতে পারো, তবেই বুঝব যে সমাধানটা তোমার মাথায় ঢুকেছে।

Exercise 2: Let the function $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be defined as

$$d(\alpha, \beta) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|$$

for $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ where $\alpha = (x_1, ..., x_n)$ and $\beta = (y_1, ..., y_n)$. Show that d is a metric on $\mathbb{R}^n$. ■

Exercise 3: Let (X, d) be a metric space. Then show that $(X \times X, d_1)$ is a metric space, where

$$d_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d(x_1, y_1) + d(x_2, y_2)$$

for $x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$. ■

Exercise 4: Let (X, d_1) and (Y, d_2) be two metric spaces. Then show that $(X \times Y, d_3)$ is a metric space, where

$$d_3((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_1(x_1, x_2) + d_2(y_1, y_2)$$

for $x_1, x_2 \in X$ and $y_1, y_2 \in Y$. ■

আমরা প্রতিদিনের জীবনে যে দূরত্বের সাথে পরিচিত সেটা হল সরলরেখা বরাবর দূরত্ব বা জ্যামিতিক দূরত্ব, যার পোশাকি নাম আগেই বলেছি Euclidean metric. যদি $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ হয়, তবে তাদের মধ্যে Euclidean metric হল

$$d\big(\ (x_1, x_2),\ \ (y_1, y_2)\ \big) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

এই দূরত্বটাকে সামান্য সাজিয়ে এইভাবে লেখা যায়--

$$\big[\ |x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2\ \big]^{1/2}. \qquad (*)$$

আর আমরা একটু আগেই Example 8-এ যে metric-টার কথা শিখলাম, সেটা ছিল $|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$, যেটাকে সাজিয়ে এভাবে লেখা যায়--

$$\big[\ |x_1 - y_1|^1 + |x_2 - y_2|^1\ \big]^{1/1}. \qquad (**)$$

এভাবে লেখাটা অদ্ভুত লাগতে পারে, কিন্তু (*) আর (**)-এর সাদৃশ্যটা দ্যাখো। (*)-এর power-গুলোতে যেখানে 2 বা 1/2 আছে, সেখানে 1 আর 1/1 বসিয়ে দিলেই (**) পাওয়া যায়। শুধু 1 বা 2-ই নয়, সেই জায়গায় যেকোনো $p \geq 1$ বসালেই একটা metric পাওয়া যায়--

$$d\big(\ (x_1, x_2),\ \ (y_1, y_2)\ \big) = \big[\ |x_1 - y_1|^p + |x_2 - y_2|^p\ \big]^{1/p}.$$

এই ধরণের metric-রা অংকের জগতে খুবই গুরুত্বপূর্ণ, এদের বলে L_p metric, যেখানে $p \geq 1$ যেকোনো সংখ্যা। সুতরাং Euclidean metric হল L_2, আর Example 8-এর metric-টা হল L_1 metric.
আমরা $p \geq 1$ হলে L_p metric-এর কথা শিখলাম। যদি $0 < p < 1$ হয়, তবে কিন্তু সেই ফর্মুলাটা আর একটা metric থাকে না (কারণ triangle inequality আর খাটে না)। সেই প্রমাণের মধ্যে আমরা এখানে যাব না। খালি বলে রাখি যে, $0 < p < 1$ হলেও L_p metric সম্ভব, কিন্তু তার ফর্মুলাটা সামান্য অন্যরকম--

$$d\big(\ (x_1, x_2),\ \ (y_1, y_2)\ \big) = |x_1 - y_1|^p + |x_2 - y_2|^p \qquad (0 < p < 1).$$

লক্ষ করো যে, এখানে সবকিছুর মাথার উপরে $\frac{1}{p}$-টা আর নেই।
নীচের অংকে আরেকটা metric-এর কথা বলা হয়েছে। এটাও অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ একটা metric, এর নাম হল L_∞ metric. আগে অংকটা করে নিই, তার পরে বলব একে কেন L_∞ বলে।

Example 9: Show that $(\mathbb{R}^n, d)$ is a metric space, where

$$d(x, y) = \max\{|x_i - y_i|\ \ :\ \ 1 \leq i \leq n\},$$

for $x = (x_1, ..., x_n),\ y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$. **(2011.11a)**
SOLUTION: এখানেও যথারীতি তিনটে ধাপ--

Step 1: Shall show

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad d(x, y) \geq 0,$ and $d(x, y) = 0 \iff x = y.$

$\forall x, y$

Take any $x = (x_1, ..., x_n)$ and $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Then for $i = 1, ..., n,\ |x_i - y_i| \geq 0.$

So $d(x, y) = \max\{|x_i - y_i|\ \ :\ \ i = 1, ..., n\} \geq 0.$

Again,

$$\begin{aligned} d(x,y)=0 &\iff \max\{|x_i-y_i| \;:\; i=1,...,n\}=0 \\ &\iff \forall i\in\{1,...,n\} \quad |x_i-y_i|=0 \quad [\because \forall i \quad |x_i-y_i|\geq 0] \\ &\iff \forall i\in\{1,...,n\} \quad x_i=y_i \\ &\iff x=(x_1,...,x_n)=(y_1,...,y_n)=y, \end{aligned}$$

as required.

দ্বিতীয় ধাপে কাজ করব symmetry নিয়ে--

Step 2: Shall show

$\forall x,y\in\mathbb{R}^n \quad d(x,y)=d(y,x).$

$\forall x,y$ Take any $x=(x_1,...,x_n), y=(y_1,...,y_n)\in\mathbb{R}^n$.

Then

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \max\{|x_i-y_i| \;:\; i=1,...,n\} \\ &= \max\{|y_i-x_i| \;:\; i=1,...,n\} \quad [\because \forall x\in\mathbb{R} \quad |-x|=|x|] \\ &= d(y,x), \end{aligned}$$

as required.

তৃতীয় ধাপে পরীক্ষা করব triangle inequality–

Step 3: Shall show

$\forall x,y,z\in\mathbb{R}^n \quad d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y).$

$\forall x,y,z$ Take any $x=(x_1,...,x_n), y=(y_1,...,y_n)$ and $z=(z_1,...,z_n)\in\mathbb{R}^n$.

Let $k_*\in\{1,...,n\}$ be such that $d(x,y)=|x_{k_*}-y_{k_*}|$.

এইটা কী করলাম ভালো করে বুঝে নিই। ধরো $n=4$, আর $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)=(11,3,1,4)$ এবং $y=(y_1,y_2,y_3,y_4)=(2,3,10,5)$. তাহলে

$$d(x,y)=\max\{|11-2|, \quad |3-3|, \quad |1-10|, \quad |4-5|\}=\{9,0,9,1\}=9.$$

লক্ষ কর যে, এই 9 সংখ্যাটা এসেছে দুই জায়গায়, এক নম্বর আর তিন নম্বর স্থানে। মানে $d(x,y)=|x_1-y_1|=|x_3-y_3|$. তাই এক্ষেত্রে আমরা $k_*=1$-ও নিতে পারি, $k_*=3$-ও নিতে পারি।

Then

$$\begin{aligned} d(x,y) &= |x_{k_*}-y_{k_*}| \\ &\leq |x_{k_*}-z_{k_*}|+|z_{k_*}-y_{k_*}| \quad [\text{by } \Delta\text{-inequality for abs. value}] \\ &\leq d(x,z)+d(z,y), \end{aligned}$$

as required, since

$$\begin{aligned}|x_{k_*} - z_{k_*}| &\leq \max\{|x_k - z_k| \ : \ 1 \leq k \leq n\} = d(x,z), \\ |z_{k_*} - y_{k_*}| &\leq \max\{|z_k - y_k| \ : \ 1 \leq k \leq n\} = d(z,y).\end{aligned}$$

■

L_∞ metric-এর নাম কেন L_∞ হয়েছে, সেটা নীচের অংক দুটো করলে নিজেই বুঝতে পারবে।

Exercise 5: $\mathbb{R}^2$-র মধ্যে যে কোনো দুটো point নাও, ধরো

$$(1,2) \text{ আর } (9,6).$$

এবার কোনো $p \geq 1$ নিলে এদের মধ্যে L_p দূরত্ব হবে

$$\left[\ |1-9|^p + |2-6|^p\ \right]^{1/p} = \left[\ 8^p + 4^p\ \right]^{1/p}.$$

এখানে 8 আর 4-এর মধ্যে বড় হল 8. সেটাকে কমন নিয়ে নাও--

$$\left[\ |1-9|^p + |2-6|^p\ \right]^{1/p} = 8\left[\ 1 + \left(\tfrac{4}{8}\right)^p\ \right]^{1/p} = 8\left[\ 1 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^p\ \right]^{1/p}.$$

এবার যদি $p \to \infty$ নাও তবে এই দূরত্বটার limit কী হবে?
HINT:
প্রথমে এটাকে এইভাবে লিখে নাও--

$$8\left[\ 1 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^p\ \right]^{1/p} = 8e^{\frac{1}{p}\log\left[\ 1+\left(\frac{1}{2}\right)^p\ \right]}.$$

এবার L'Hôpital লাগিয়ে

$$\lim_{p\to\infty} \frac{\log\left[\ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^p\ \right]}{p}$$

বার করো। এই limit-টা যদি L হয়, তবে উত্তর হবে $8e^L$. ■

Exercise 6: একই কায়দায় দেখাও যে

$$\lim_{p\to\infty}\left[\ |x_1-y_1|^p + |x_2-y_2|^p\ \right]^{1/p} = \max\{|x_1-y_1|,\ |x_2-y_2|\}.$$

তার মানে L_p দূরত্বের limit নিলে L_∞ দূরত্ব পাওয়া যায়। ■

DAY 3
$\mathbb{R}^n$-এর উপরে বিভিন্ন metric (part 2)

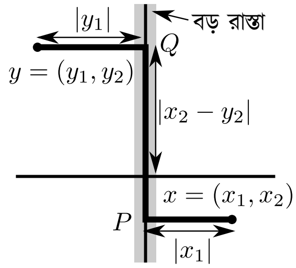


Fig 8

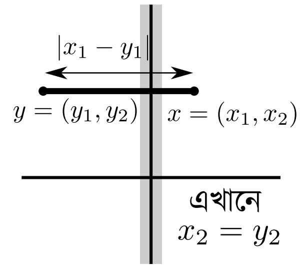


Fig 9

L_p metric-রা অংকের জগতে অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ, বিশেষ করে L_2, L_1 এবং L_∞. এবার $\mathbb{R}^n$-এর উপরে আরও কিছু metric-এর কথা শিখব, যেগুলো মোটেই গুরুত্বপূর্ণ কিছু নয়, কেবল অংকের কসরৎ।

Example 10: Show that (X, d) is a metric space where $X = \mathbb{R}^2$,

$$d(x,y) = \begin{cases} |x_1 - y_1| & \text{if } x_2 = y_2 \\ |x_1| + |y_1| + |x_2 - y_2| & \text{if } x_2 \neq y_2 \end{cases}$$

for $x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2)$ in X.[5] **(2013.5a)**

SOLUTION: এই অংকটা হঠাৎ দেখলে গোলমেলে লাগতে পারে। এরকম একটা বিদ্‌ঘুটে d কেন খামোখা একটা metric হতে যাবে, সেটা স্পষ্ট নয়। কিন্তু ছবি দিয়ে ভাবলে ব্যাপারটা তেমন শক্ত নয়। Fig 8 দ্যাখো। ধরো $\mathbb{R}^2$-টা হল একটা মস্ত বড় শহর, সেই শহরে সব জায়গা দিয়েই পূর্বপশ্চিমে রাস্তা চলে গেছে, কিন্তু উত্তরদক্ষিণে খালি একটাই রাস্তা আছে, সেটা y-axis বরাবর। ছবিতে এটাকে "বড় রাস্তা" বলেছি। যদি $x = (x_1, x_2)$ বিন্দু থেকে কাউকে $y = (y_1, y_2)$ বিন্দুতে পৌঁছতে হয়, তবে তাকে প্রথমে এই বড় রাস্তায় উঠতে হবে (ছবিতে xP দূরত্ব), তার পর সেই রাস্তা ধরে y-এর মুখোমুখি পৌঁছতে হবে (ছবিতে PQ) এবং তারপর আবার রাস্তা ছেড়ে y-তে যেতে হবে (ছবিতে Qy)। সুতরাং মোট দূরত্ব হবে

$$\underbrace{|x_1|}_{x \text{ থেকে রাস্তা}} + \underbrace{|x_2 - y_2|}_{\text{রাস্তা বরাবর}} + \underbrace{|y_1|}_{\text{রাস্তা থেকে } y}$$

অবশ্য যদি x আর y সমান উচ্চতায় থাকে তবে বড় রাস্তা ধরে যাওয়ার কোনো দরকারই নেই (Fig 9)। সেক্ষেত্রে দূরত্ব হবে

$$|x_1 - y_1|.$$

ঠিক এই দূরত্বটাই হল আমাদের d.

Step 1: Shall show

$\forall x, y \in X \quad d(x,y) \geq 0,$ and $d(x,y) = 0 \iff x = y.$

$\forall x, y$ Take any $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in X.$

Since $d(x,y)$ is defined as sum of absolute quantities, hence $d(x,y) \geq 0.$

এবার আমরা $\iff$ -এর $\Longleftarrow$ অংশটা দেখাব।

Also if $x = y$ then $x_2 = y_2$ and so

$$d(x,y) = |x_1 - y_1| = 0.$$

■

এবার $\implies$ অংশটা, মানে $d(x,y)=0$ হলে $x=y$ হয়। আমরা সেটাকেই একটু ঘুরিয়ে দেখাব যে, $x \neq y$ হলে $d(x,y)>0$ হতে বাধ্য।

Conversely, let $x \neq y$.

এইবার দুটো কেসে ভেঙে এগোতে হবে, $x_2 = y_2$ আর $x_2 \neq y_2$, কারণ d-এর সংজ্ঞাটা এইভাবেই দুটো কেসে ভেঙে দেওয়া ছিল।

Case 1: If $x_2 = y_2$, then $x_1 \neq y_1$, because $x \neq y$. So

$$d(x,y) = |x_1 - y_1| > 0,$$

as required.

Case 2: If $x_2 \neq y_2$,

$$d(x,y) = |x_1| + |y_1| + |x_2 - y_2| \geq |x_2 - y_2| > 0,$$

as required.

এবার symmetry--

Step 2: Shall show

$\forall x,y \in X \quad d(x,y) = d(y,x).$

$\forall x,y$ Take any $x = (x_1,x_2), y = (y_1,y_2) \in X$.

Symmetry-র প্রমাণেও দুটো কেস হবে।

Case 1: If $x_2 = y_2$,

$$d(x,y) = |x_1 - y_1| = |y_1 - x_1| = d(y,x),$$

as required.

Case 2: If $x_2 \neq y_2$,

$$d(x,y) = |x_1| + |y_1| + |x_2 - y_2| = |y_1| + |x_1| + |y_2 - x_2| = d(y,x),$$

as required.

এবার triangle inequality দেখাব।

Step 3: Shall show

$\forall x,y,z \in X \quad d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y).$

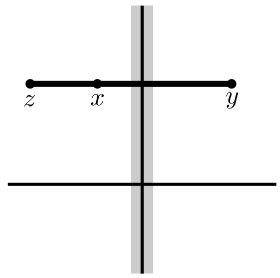


Fig 10

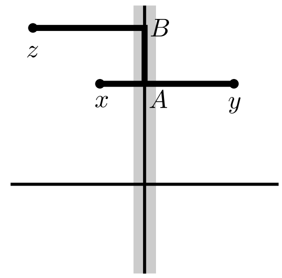


Fig 11

$\forall x, y, z$ Take any $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2), z = (z_1, z_2) \in X.$

আগের দুই ধাপে খালি x, y নিয়ে কাজ করেছিলাম, তাই দুটো করে কেস হয়েছিল। এবার x, y, z তিনজন আছে। তাই কেসের সংখ্যা বাড়বে। কেসগুলো নির্ভর করবে x_2, y_2 আর z_2-র মধ্যে কে কার সঙ্গে সমান বা অসমান তার উপরে। প্রথম কেসটা হল যেখানে সবাই সমান। মানে সবাই একই উচ্চতায় আছে (Fig 10)। এখানে বড় রাস্তার দরকারই নেই।

Case 1: $x_2 = y_2 = z_2$: Here

$$d(x,z) + d(z,y) = |x_1 - z_1| + |z_1 - y_1| \geq |x_1 - y_1| = d(x,y).$$

as required, by Δ-inequality of absolute value.

এবার তিনটে কেস দেখব যেখানে দুটো বিন্দু একই উচ্চতায়, কিন্তু তৃতীয়টা অন্য উচ্চতায়। যদি z-টা আলাদা উচ্চতায় থাকে, তবে হবে Fig 11-এর মত। সে ক্ষেত্রে--

Case 2: $x_2 = y_2 \neq z_2$: Here

$$d(x,z) + d(z,y)$$
$$= |x_1| + |z_1| + |x_2 - z_2| + |z_1| + |y_1| + |z_2 - y_2|$$

এখানে x থেকে z হয়ে y-তে যাওয়া মানে Fig 11-এ $x \to A \to B \to z \to B \to A \to y$ যাওয়া। যদি x থেকে y-তে পৌঁছনোই উদ্দেশ্য হয়, তবে এর মধ্যে $A \to B \to z \to B \to A$ অংশটা খালি বাড়তি কষ্ট। সেই অংশটা বাদ দিলেই পড়ে থাকে--

$$\geq |x_1| + |y_1|$$
$$\geq |x_1 - y_1| \quad [\text{by } \Delta\text{-inequality for abs. value}]$$
$$= d(x,y),$$

as required.

যদি x-টা আলাদা উচ্চতায় থাকে তবে ছবিটা হতে পারে Fig 12-র মত।

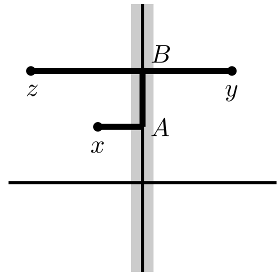


Fig 12

Case 3: $x_2 \neq y_2 = z_2$: Here

$$\begin{aligned}
&d(x,z)+d(z,y)\\
&= \big(|x_1|+|z_1|+|x_2-z_2|\big)+|z_1-y_1|\\
&= |x_1|+|x_2-y_2|+\big(|z_1|+|z_1-y_1|\big) \quad [\because y_2=z_2]
\end{aligned}$$

এখানে x থেকে z হয়ে y-তে যাওয়া মানে Fig 12-এ $x \to A \to B \to z \to y$ যাওয়া। কিন্তু x থেকে সরাসরি y-তে যেতে হলে এর মধ্যে $x \to A \to B$ অংশটা যেতেই হবে, কিন্তু B থেকে সোজা y-তে গেলেই চলত, z হয়ে ঘুরে যাওয়ার বাড়তি কষ্টটুকু করতে হত না--

$$\begin{aligned}
\therefore\quad &d(x,z)+d(z,y)-d(x,y)\\
&= |x_1|+|x_2-y_2|+\big(|z_1|+|z_1-y_1|\big)-\big(|x_1|+|x_2-y_2|+|y_1|\big)\\
&= \big(|z_1|+|z_1-y_1|\big)-|y_1| \geq 0,
\end{aligned}$$

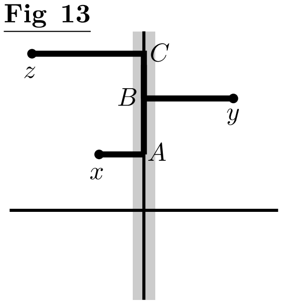
by Δ-inequality of absolute values, as required.

যদি y থাকে আলাদা উচ্চতায়, তবে সেটা আগের মতই ব্যাপার, খালি x, y-এর স্থানবিনিময় করে দিলেই চলবে।

Case 4: $y_2 \neq x_2 = z_2$: Similar to last case.

যদি সবাই আলাদা আলাদা উচ্চতায় থাকে, তবে পাব Fig 13-এর মত একটা ছবি। সেক্ষেত্রে--

Fig 13



Case 5: x_2, y_2, z_2 all distinct: Here

$$d(x,z) + d(z,y)$$
$$= |x_1| + |z_1| + |x_2 - z_2| + |z_1| + |y_1| + |z_2 - y_2|$$

এখানে x থেকে z হয়ে y-তে যেতে গেলে $x \to A \to C \to z \to C \to B \to y$ যেতে হবে। যদি x থেকে y সরাসরি গেলেই চলত তবে আরও সংক্ষেপে এইভাবে কাজ সারতাম, $x \to A \to B \to y$.

$$\geq |x_1| + |y_1| + \big(|x_2 - z_2| + |z_2 - y_2|\big) \quad [\because |z_1| \geq 0]$$
$$\geq |x_1| + |y_1| + |x_2 - y_2| \quad [\text{by } \Delta\text{-inequality of abs. value}]$$
$$= d(x,y),$$

as required.

■

ছবি ব্যবহার করার ক্ষেত্রে একটা ব্যাপারে কিন্তু সাবধান, ছবিগুলো নানাভাবে আঁকা যায়, সুতরাং খেয়াল রেখো যেন তোমার প্রমাণের ধাপগুলো তোমার আঁকা কোনো একটা বিশেষ ছবির উপর নির্ভরশীল হয়ে না পড়ে। ছবিটা থেকে খালি বুঝে নিতে হবে কোনদিকে এগোব, প্রমাণের প্রতিটা ধাপ যেন অংক কষে তার পূর্ববর্তী ধাপ থেকে পাওয়া যায়, ছবি ছাড়াই।
যদি এই অংকটায় তোমার ছবি দিয়ে ভাবতে মজা লেগে থাকে, তাহলে নীচের অংকটাও চেষ্টা করে দেখতে পারো। এখানে আমাদের set-টা হল $\mathbb{R}$. এটা যেন একটা লম্বা শহর। 0-তে একটা পুলিশের চেকপোষ্ট আছে। শহরটার নিয়ম হল তুমি স্থান পরিবর্তন করতে গেলেই তোমাকে যাওয়ার পথে এই চেকপোষ্টে এসে রিপোর্ট করতে হবে। যেমন, যদি তুমি -2 থেকে -3-এ যেতে যাও, তবে প্রথমে -2 থেকে 0-তে আসতে হবে, তারপর সেখান থেকে -3-এ যেতে হবে। কিন্তু যদি -2 থেকে 3-এ যেতে চাও, তবে যাওয়ার পথেই চেকপোষ্ট হয়ে আসতে পারবে। এই গল্পটা মাথায় রেখে নীচের অংকটা কর দেখি।

Exercise 7: Show that $(\mathbb{R}, d)$ is a metric space, where $d(x,y) = |x| + |y|$. ■

আরেকটা গল্প করা অংক দিই।

Exercise 8: আবার আমরা $\mathbb{R}$ নিয়ে কাজ করব। মনে করো $\mathbb{R}$-টা যেন একটা লম্বা রাস্তা, তার সর্বত্রই তুমি বাসে বা রিক্সায় করে যেতে পারো। বাস চলে খালি 0 থেকে বাঁদিকে, আর রিক্সা চলে 0 থেকে ডানদিকে। বাসের ভাড়া হল প্রতি একক দূরত্বে 1 টাকা, আর রিক্সার ভাড়া হল একক দূরত্বে 4 টাকা। যদি x থেকে y যেতে সবচেয়ে কম $d(x,y)$ টাকা লাগে, তবে $d(x,y)$-এর একটা ফর্মুলা বার কর, এবং সেই ফর্মুলা ব্যবহার করে দেখাও যে $(\mathbb{R}, d)$ একটা metric space. ■

আজকে যে অংকগুলো দেখলাম তাদের পুরো গুছিয়ে লিখে প্রমাণ করতে হলে অনেক খাটতে হয়। কিন্তু তা বলে মুষড়ে যেও না। এগুলো থেকে শিক্ষণীয় এটাই যে, বিভিন্নরকম পরিস্থিতি বিভিন্নরকমের metric-এর জন্ম দেয়। তবে এরকম বিদঘুটে সব পরিস্থিতি অংকের জগতে বড় একটা আসে না। তাই আজকের অংকগুলো ভালো না লাগলেও চিন্তার কোনো কারণ নেই।

DAY 4
অন্যান্য set-এর উপরে metric

4.1 $C[a,b]$

গত দুদিন ধরে আমরা $\mathbb{R}^n$-এর উপরে নানারকম metric-এর কথা শিখেছি। আজকে প্রথমে শিখব $C[a,b]$ নামে একটা set-এর

উপরে কয়েকটা metric-এর কথা। এখানে $a < b$ হল দুটো সংখ্যা। যত continuous function আছে $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ তাদের set-টারই নাম হল $C[a, b]$. এই set-এর কয়েকজন সদস্যর গ্রাফ এঁকেছি Fig 14-এ।
$\mathbb{R}^n$-এর উপরে যেমন L_p, L_∞ ইত্যাদি metric হয়, এখানেও সেরকম সম্ভব। $\mathbb{R}^n$-এর element-রা দেখতে ছিল এইরকম--$(x_1, ..., x_n)$. যদি এটাকে লিখি $(x(1), ..., x(n))$, অমনি তুমি এটাকে একটা function বলে চিনতে পারবে--

$$x : \{1, ..., n\} \to \mathbb{R}.$$

যদি $\{1, ..., n\}$-এর বদলে $[a, b]$ বসিয়ে দিই, আর একটা বাড়তি continuity-র শর্ত চাপাই, তাহলেই পাবে $C[a, b]$. এবার মনে করে দ্যাখো $\mathbb{R}^n$-এর বেলায় L_∞ metric ছিল এইরকম--

$$d(x, y) = \max\left\{|x_i - y_i| \ : \ i \in \{1, ..., n\}\right\}.$$

সুতরাং এর নকলে $C[a, b]$-র উপরে আমরা L_∞ metric বানানোর চেষ্টা করতে পারি এইভাবে--

$$d(x, y) = \max\left\{|x(t) - y(t)| \ : \ t \in [a, b]\right\}.$$

অর্থাৎ $x(t)$ এবং $y(t)$ এই দুটো function-এর মধ্যে দূরত্ব মাপছি তাদের গ্রাফের মধ্যে সবচেয়ে বেশী যেখানে ফাঁক সেই দূরত্ব দিয়ে (Fig 15)। এটা যে সত্যই $C[a, b]$-এর উপরে একটা metric হবে, সেটাই দেখাতে বলেছে নীচের অংকটায়। খালি max না বলে sup বলেছে, যেটা এক্ষেত্রে একই কথা কারণ $[a, b]$ হল closed, bounded, এবং আমাদের function-রা সবাই continuous, তাই sup আর max এখানে একই ব্যাপার। এখানে বলে রাখি, $C[a, b]$-র উপরে L_∞ metric-এর আরেকটা নাম হল **sup-metric**.

Example 11: Let X consist of all real-valued continuous functions $x(t)$ defined on the closed and bounded interval $[a, b]$. If $x(t), y(t) \in X$, we define

$$d(x(t), y(t)) = \sup_{a \le t \le b} |x(t) - y(t)|.$$

Show that (X, d) is a metric space.[4] **(2007.12a)**
SOLUTION: আমরা যেটাকে এক্ষুণি $C[a, b]$ বললাম, এই অংকে সেটাকেই X বলেছে। এখানে d-এর সংজ্ঞার মধ্যে একটা sup রয়েছে। তাই আগে দেখিয়ে নেওয়া ভালো যে sup-টা সত্যিই exist করে।

> For any $x, y \in X$, the function $|x(t) - y(t)|$ is a continuous function on the closed and bounded set $[a, b]$,

কারণ $x(t)$ আর $y(t)$ দুজনেই continuous হওয়ায় $x(t) - y(t)$-ও তাই। আবার absolute value-ও একটা continuous function. তাই $|x(t) - y(t)|$ একটা continuous function হচ্ছে। আমরা জানি closed and bounded set-দের উপরে continuous function-রা bounded হয়, অতএব--

Fig 14

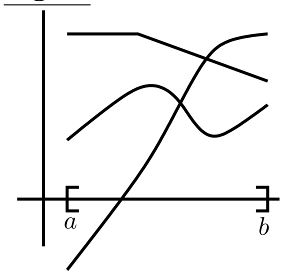
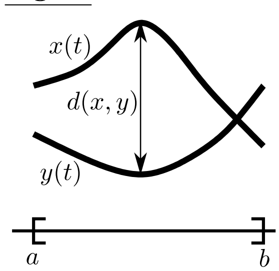


Fig 15



and so is bounded. Thus the set

$$\{|x(t)-y(t)| \ : \ t \in [a,b]\}$$

is bounded and nonempty. Hence its supremum exists in $\mathbb{R}$.

Thus $d(x,y)$ is well-defined.

এইবার আমরা নিশ্চিন্তে তিন ধাপে এগোতে পারব--

Step 1: Shall show

$\forall x, y \in X \quad d(x,y) \geq 0,$ and $d(x,y) = 0 \iff x = y.$

একটু সাবধান করে দিই। এখানে x, y দুজনেই হল function. তাই $x = y$ মানে

$$\forall t \in [a,b] \quad x(t) = y(t).$$

$\forall x, y$ Take any $x, y \in X$.

Then $\forall t \in [a,b] \quad |x(t)-y(t)| \geq 0$. So

$$d(x(t), y(t)) = \sup_{a \leq t \leq b} |x(t)-y(t)| \geq 0.$$

Also

$$\begin{aligned} x = y \quad &\iff \quad \forall t \in [a,b] \quad |x(t)-y(t)| = 0 \\ &\iff \quad \sup\{|x(t)-y(t)| \ : \ t \in [a,b]\} = 0 \\ &\iff \quad d(x,y) = 0, \end{aligned}$$

as required.

দ্বিতীয় ধাপে symmetry-র পালা--

Step 2: Shall show

$\forall x, y \in X \quad d(x,y) = d(y,x).$

$\forall x, y$ Take any $x, y \in X$.

Then

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sup_{a \leq t \leq b} |x(t)-y(t)| \\ &= \sup_{a \leq t \leq b} |y(t)-x(t)| \quad [\because \forall p \in \mathbb{R} \quad |-p| = |p|] \\ &= d(y,x), \end{aligned}$$

as required.

তৃতীয় ধাপে triangle inequality–

Step 3: Shall show

$\forall x, y, z \in X \quad d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y).$

$\forall x, y, z$ Take any $x, y, z \in X$.

Then

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sup_{a\le t\le b} |x(t) - y(t)| \\ &\le \sup_{a\le t\le b} [|x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)|] \quad [\text{ by } \Delta\text{-inequality for abs. value}] \end{aligned}$$

এবার আমরা sup-টাকে দুভাগে ভাঙব। তার জন্য এই সহজ তথ্যটা কাজে লাগবে-- যদি f আর g দুটো bounded function হয়, তবে $\sup(f+g) \le \sup(f) + \sup(g)$ হতে বাধ্য। কারণ f যতটা উঁচুতে উঠতে পারে, আর g যতটা উঁচুতে উঠতে পারে, তাদের যোগ করলে যা হবে, বুঝতেই পারছ $f+g$ তার চেয়ে উঁচুতে উঠতে পারবে না।

$$\begin{aligned} &\le \sup_{a\le t\le b} |x(t) - z(t)| + \sup_{a\le t\le b} |z(t) - y(t)| \quad [\text{ by property of sup}] \\ &= d(x,z) + d(z,y), \end{aligned}$$

as required.

■

Exercise 9: Let $C[0,1]$ denote the set of all real-valued continuous functions defined over $[0,1]$. Let

$$d : C[0,1] \times C[0,1] \to \mathbb{R}$$

be defined as follows.

$$d(f,g) = \sup_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t)| \text{ for all } f, g \in C[0,1].$$

Show that $(C[0,1], d)$ is a metric space.[3] **(2009.11ap1)**
HINT:
আগের অংকটাই, খালি $[a,b]$-র জায়গায় $[0,1]$ দিয়েছে। ■

Exercise 10: Let $C[0,1]$ denote the set of all real-valued continuous functions defined over $[0,1]$. Let

$$d : C[0,1] \times C[0,1] \to \mathbb{R}$$

be defined as follows.

$$d(f,g) = \sup_{t\in[0,1]} e^t |f(t) - g(t)| \text{ for all } f, g \in C[0,1].$$

Show that $(C[0,1], d)$ is a metric space. ■

এই অংকগুলো ভালো করে বুঝে থাকলে পরের অংকটা একদম সোজা লাগা উচিত। এটাও একই অংক, খালি continuous-এর বদলে bounded বলেছে।

Exercise 11: Let $B[0,1]$ denote the set of all real-valued *bounded* functions defined over $[0,1]$. Let

$$d : B[0,1] \times B[0,1] \to \mathbb{R}$$

be defined as follows. For $f, g \in B[0,1]$,

$$d(f,g) = \sup_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t)|.$$

Is $(B[0,1], d)$ a metric space? ■

Example 12: Let $C[0,1]$ denote the set of all real-valued continuous functions defined over $[0,1]$. If

$$\rho : C[0,1] \times C[0,1] \to \mathbb{R}$$

is defined by

$$\rho(f,g) = \inf_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t)| \text{ for all } f, g \in C[0,1],$$

will ρ define a metric on $C[0,1]$? Justify your answer.[2] **(2009.11ap2)**
SOLUTION: প্রথমে প্রশ্নটা ছবি দিয়ে বুঝে নেওয়া যাক। Fig 16 দ্যাখো। এখানে $f(t)$ আর $g(t)$-র মধ্যে দূরত্ব মাপার চেষ্টা করা হচ্ছে ওদের গ্রাফের মধ্যে যেখানে ফাঁক সবচেয়ে কম সেখানটা দিয়ে। বুঝতেই পারছ যে, যদি গ্রাফ দুটো পরস্পরের গায় কোথাও লেগে যায় তাহলেই এই সবচেয়ে কম ফাঁকটা শূন্য হয়ে যাবে, কিন্তু গ্রাফ দুটো এক জায়গায় লেগেছে মানেই তো আর $f(t) \equiv g(t)$ নয় (Fig 17)! তাই এখানে সংজ্ঞার প্রথম শর্তটাতেই আটকে যাবে। একটা counterexample দিয়ে সেটা গুছিয়ে লিখব। Fig 18 দ্যাখো।

> No, ρ is not a metric on $C[0,1]$. Let $f, g \in C[0,1]$ be defined as
>
> $$f(t) \equiv 0 \text{ and } g(t) = t.$$
>
> Then
>
> $$\rho(f,g) = \inf\{|f(t) - g(t)| \ : \ t \in [0,1]\} = \inf\{|t| \ : \ t \in [0,1]\} = 0.$$

Fig 16

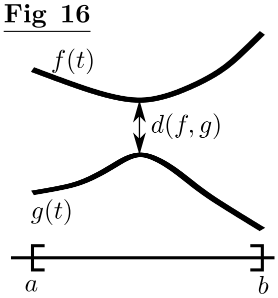


Fig 17

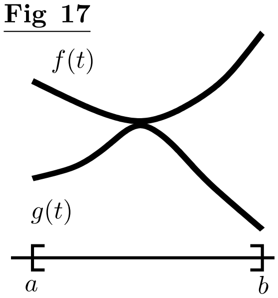
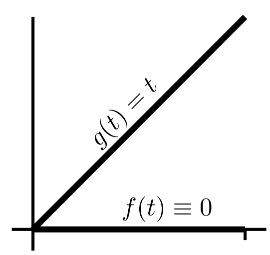


Fig 18



But $f \neq g$, because $f(1) = 0 \neq 1 = g(1)$.

■

$C[a,b]$-র উপরে L_∞ metric কী জিনিস সেটা দেখলাম--

$$d(x,y) = \sup_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)|.$$

এবার দেখব L_p metric-রা কী রকম। যদি $p \geq 1$ হয়, তবে $\mathbb{R}^n$-এর উপরে L_p metric ছিল

$$d(x,y) = \left[\sum_1^n |x_i - y_i|^p\right]^{1/p}.$$

আর $0 < p < 1$-এর জন্য L_p metric ছিল

$$d(x,y) = \sum_1^n |x_i - y_i|^p.$$

যদি একই ধরণের জিনিস $C[a,b]$-র ক্ষেত্রে করতে চাই, তবে $\sum_1^n$-এর বদলে $\int_a^b$ লাগবে, অর্থাৎ $p \geq 1$ হলে

$$d(x,y) = \left[\int_a^b |x(t) - y(t)|^p dt\right]^{1/p},$$

আর $0 < p < 1$ হলে

$$d(x,y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|^p dt.$$

এগুলো কী সত্যই একেকটা metric হবে? উত্তর হল--হ্যাঁ। নীচের অংকে সেটাই দেখাতে বলেছে $p = 1$-এর জন্য।

Example 13: Let $C[0,1]$ denote the set of all real-valued continuous functions on $[0,1]$. For $x, y \in C[0,1]$ define

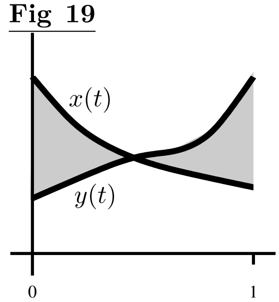
$$d(x,y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)| dt.$$

Show that d is a metric on $C[0,1]$.[4] **(2007.11a)**

SOLUTION: এখানে metric-টা দেখতে কীরকম সেটা Fig 19-এ দেখিয়েছি। এই অংকে $d(x,y)$ হল $x(t)$ এবং $y(t)$-এর গ্রাফের মাঝখানের shaded অংশটুকুর area.

যেহেতু এখানে d-এর সংজ্ঞার মধ্যে integration ব্যবহার করা হয়েছে, তাই আগে দেখিয়ে নিতে হবে যে integration-টা সত্যিই করা যায়--

Fig 19



For $x, y \in C[0,1]$ the function $|x(t) - y(t)|$ is continuous, and hence Riemann integrable, on $[0,1]$. So $d(x,y)$ is well-defined.

এবার তিন ধাপের কায়দা--

Step 1: Shall show

$\forall x, y \in C[0,1] \quad d(x,y) \geq 0,$ and $d(x,y) = 0 \iff x = y.$

$\forall x, y$ Take any $x, y \in C[0,1]$.

Then $\forall t \in [0,1] \quad |x(t) - y(t)| \geq 0.$

So, by property of Riemann integration,

$$d(x,y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)| dt \geq 0.$$

Again, we know that if f is a nonnegative continuous function on $[0,1]$, then

$$\int_0^1 f(t) dt = 0 \iff f(t) \equiv 0.$$

এমনটা কেন হয়, একটু মনে করিয়ে দিই--যদি $f(t) \equiv 0$ না হত, তবে এমন কোনো t_0 পেতে যাতে $f(t_0) > 0$ হয়। ধরো $f(t_0) = \epsilon$. যেহেতু f হল continuous, তাই t_0-কে ঘিরে এমন একটা neighbourhood পাবে যাতে তার উপরে $f(t) > \frac{\epsilon}{2}$ হয়। সুতরাং Fig 20-এর মত বাক্সটা পুরোটাই গ্রাফটার নীচে থাকবে। সুতরাং $\int_0^1 f(t) dt > 0$ হয়ে যাচ্ছে। অতএব এরকম কোনো t_0 থাকতে পারে না।

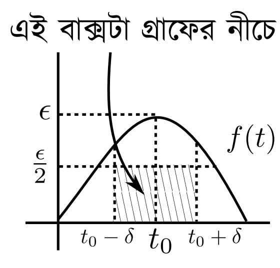
So

$$\begin{aligned} d(x,y) = 0 &\iff \int_0^1 |x(t) - y(t)| dt = 0 \\ &\iff \forall t \in [0,1] \quad |x(t) - y(t)| = 0 \quad [\because |x(t) - y(t)| \text{ continuous}] \\ &\iff x = y, \end{aligned}$$

as required.

দ্বিতীয় ধাপে symmetry–

Fig 20



Step 2: Shall show

$\forall x, y \in C[0,1] \quad d(x,y) = d(y,x).$

$\forall x, y$ Take any $x, y \in C[0,1]$.

Then

$$d(x,y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)| dt = \int_0^1 |y(t) - x(t)| dt = d(y,x),$$

as required.

তৃতীয় ধাপে triangle inequality–

Step 3: Shall show

$\forall x, y, z \in C[0,1] \quad d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y).$

$\forall x, y, z$ Take any $x, y, z \in C[0,1]$.

Then, by Δ-inequality of abs. value,

$$\forall t \in [0,1] \quad |x(t) - y(t)| \leq |x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)|.$$

$\therefore$ By property of Riemann integration,

$$\int_0^1 |x(t) - y(t)| dt \leq \int_0^1 |x(t) - z(t)| dt + \int_0^1 |z(t) - y(t)| dt,$$

or

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y),$$

as required.

■

উপরের সমাধানটা ভালো করে পড়ে নিয়ে নীচের অংকটা কর দেখি।

Exercise 12: Let $R[0,1]$ denote the set of all real-valued Riemann-integrable functions on $[0,1]$. For $x, y \in R[0,1]$ define

$$d(x,y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)| dt.$$

Is d a metric on $R[0,1]$? ■

Exercise 13: Let $C[0,1]$ denote the set of all real-valued continuous functions on $[0,1]$. For $x, y \in C[0,1]$ define

$$d(x,y) = \int_0^1 e^{-t} |x(t) - y(t)| dt.$$

Is d a metric on $C[0,1]$? ■

Exercise 14: Let $C[0,2]$ denote the set of all real-valued continuous functions on $[0,2]$. For $x, y \in C[0,2]$ define

$$d(x,y) = \int_0^1 e^{-t}|x(t) - y(t)|dt.$$

Is d a metric on $C[0,2]$?
HINT: লক্ষ করো, integral-টা কিন্তু 0 থেকে 1 পর্যন্ত, 2 পর্যন্ত নয়! ■

Exercise 15: Let $C[0,1]$ denote the set of all real-valued continuous functions on $[0,1]$. For $x, y \in C[0,1]$ define

$$d(x,y) = \sup\{|x(t) - y(t)| \ : \ t \in \mathbb{Q} \cap [0,1]\}.$$

Is d a metric on $C[0,1]$? ■

4.2 Sequence space

$\mathbb{R}^2$-র element-রা দেখতে (x_1, x_2)-এর মত, মানে দুটো করে real number নিয়ে তৈরী। $\mathbb{R}^3$-এর element-রা দেখতে (x_1, x_2, x_3)-র মত। একইভাবে $\mathbb{R}^n$-এর element-রা হল $(x_1, x_2, ..., x_n)$-এর মত। যদি এইভাবে টানা চালিয়ে যেতেই থাকি, কখনোই না থামি, তবে পাব real number-দের একটা infinite sequence, $(x_1, x_2, ...)$. সেই কারণে এরকম যাবতীয় infinite sequence-এর set-কে অনেকে $\mathbb{R}^\infty$ লেখে (যদিও আমরা এ বইতে তা করব না)। ঠিক যেভাবে আমরা $\mathbb{R}^n$-এর উপর L_p বা L_∞ metric চাপিয়েছিলাম, সেভাবে sequence-এর set-এর উপরেও metric চাপানোর চেষ্টা করা যায়। যেমন $p \geq 1$ হলে $\mathbb{R}^n$-এর উপর L_p metric-টা ছিল এইরকম--

$$\left[\sum_1^n |x_i - y_i|^p\right]^{1/p}.$$

সেটাকে sequence-এর বেলায় নকল করলে পাব একটা infinite series–

$$\left[\sum_1^\infty |x_i - y_i|^p\right]^{1/p}.$$

এইটা কী সত্যিই একটা metric হবে? অবশ্য তার আগে দেখতে হবে যে series-টা আদৌ converge করে কিনা। দুঃখের কথা হল--নাও করতে পারে। কিন্তু যদি আমরা খালি এমন sequence $\{x_n\}_n$-দের নিয়ে কাজ করি যাতে $\sum |x_i|^p < \infty$ হয়, তবে আর convergence নিয়ে কোনো সমস্যা নেই। সেক্ষেত্রে সত্যিই এটা metric হয়, যাকে বলে ℓ_p metric. লক্ষ কর এখানে L-এর বদলে ℓ লিখছি। একইভাবে $0 < p < 1$-এর জন্যেও ℓ_p metric সম্ভব। সেইসব নিয়েই নীচের সংজ্ঞাটা--

DEFINITION: ℓ_p metric

Let $p > 0$. Let X be the set of all real sequences $\{x_n\}_n$ such that $\sum |x_n|^p < \infty$. Then, for $p \geq 1$,

$$d(x,y) = \left[\sum_1^\infty |x_n - y_n|^p\right]^{1/p}$$

where $x = \{x_n\}_n$ and $y = \{y_n\}_n$, is a metric on X.
Similarly, for $0 < p < 1$,

$$d(x,y) = \sum_1^\infty |x_n - y_n|^p$$

where $x = \{x_n\}_n$ and $y = \{y_n\}_n$, is a metric on X.
This is called the ℓ_p **metric**.

একইভাবে L_∞-র অনুকরণে আমরা ℓ_∞ বানাতে পারি--

DEFINITION: ℓ_∞ metric

Let X be the set of all real bounded sequences $\{x_n\}_n$. Then the ℓ_∞ **metric** on X is defined as

$$d(x,y) = \sup\{|x_n - y_n| \ : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

লক্ষ কর এখানে আমরা খালি bounded sequence-দের নিয়ে কাজ করেছি, যাতে sup-টার existence নিয়ে কোনো সমস্যা না হয়।

Exercise 16: Show that ℓ_∞ as defined above is a metric on the set of all bounded real sequences. ■

Exercise 17: Prove triangle inequality for ℓ_1 metric. ■

DAY 5
Triangle inequality

5.1 আরেকটা রূপ

Triangle inequality জিনিসটা আমরা real analysis থেকেই দেখে আসছি, এবং metric-এর সংজ্ঞাতেও ওটা একটা শর্ত। Triangle inequality-র একটা রূপ আমরা সকলেই জানি--

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y).$$

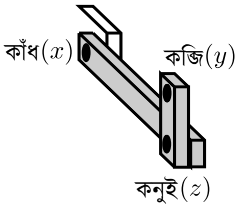


Fig 21

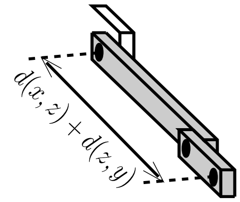


Fig 22

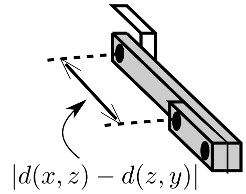


Fig 23

এর মানে হল--x থেকে y-তে যাবার সময়ে z হয়ে ঘুরপথে গেলে দূরত্ব কমতে পারে না। চাইলে ঘুরপথটা যত খুশি লম্বা করতে পারো--মনে করো $z_1, z_2, ..., z_n$ হয়ে তবে y-তে পৌঁছবে। তাহলে triangle inequality-টা একেবারে একটা শিকলের মত দেখাবে--

$$d(x,y) \leq d(x,z_1) + d(z_1,z_2) + \cdots + d(z_n,y).$$

Triangle inequality-র আরেকটা রূপ আছে যেটাও বেশ কাজের জিনিস। এই দুটোকে এক সঙ্গে ছবি দিয়ে মনে রাখলে সুবিধা হবে। মনে করো Fig 21 হল একটা রোবোটের হাত। x হল কাঁধ, y হল কব্জি, এবং z হল কনুই। তার মানে হাতের উপরের অংশের দৈর্ঘ্য হল $d(x,z)$ আর নীচের অংশের দৈর্ঘ্য $d(z,y)$. প্রশ্ন হল রোবোটটা তার কব্জিটাকে কাঁধের থেকে কত দূর পর্যন্ত প্রসারিত করতে পারে? উত্তর হল--সবচেয়ে বেশী $d(x,z)+d(z,y)$ পর্যন্ত, যখন কনুইতে কোনো ভাঁজ থাকবে না (Fig 22)। কোনোভাবেই $d(x,y)$ এই দূরত্বের চেয়ে বেশী হতে পারবে না, তার মানে

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y),$$

যেটা আমাদের পরিচিত triangle inequality. এবার আরেকটা প্রশ্ন করি--কব্জিটাকে কাঁধের কত কাছে আনা সম্ভব? উত্তর হল--যখন কনুইটাকে সম্পূর্ণ ভাঁজ করা হবে (Fig 23)। লক্ষ কর যে, তখন কাঁধ আর কব্জির দূরত্বটা হবে হাতের উপরের অংশ আর নীচের অংশের দৈর্ঘ্যের পার্থক্যটা, মানে $|d(x,z)-d(z,y)|$. তার মানে সব সময়েই

$$d(x,y) \geq |d(x,z) - d(z,y)|.$$

এটাও triangle inequality-র আরেকটা রূপ। দুটোকে মিলিয়ে এইভাবে ভাবতে পারো--রোবোটটা যেভাবেই হাত ঘোরাক না কেন, ওর কব্জিটা কোনো সময়েই Fig 24-এর shaded বলয়াকার জায়গাটার বাইরে যেতে পারবে না। Fig 24-এ হাতের নীচের অংশটা ছোটো নিয়েছি। যদি নীচের অংশটা বড় নিতাম তবে পেতাম Fig 25। এখানেও একই ব্যাপার।
নীচের অংকে triangle inequality-র এই নতুন রূপটা প্রমাণ করতে দিয়েছে।

Example 14: If $x, y, z,$ are any three points on a metric space (X, d), show that

$$d(x,y) \geq |d(x,z) - d(z,y)|.$$

[2] **(2006.11a(part 2))**

Fig 24

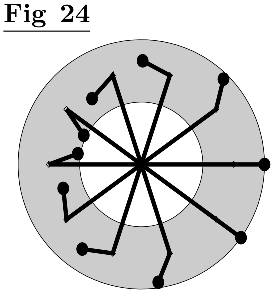
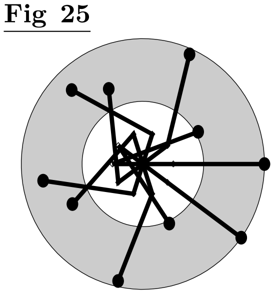


Fig 25



SOLUTION: আমাদের কাজ হল $d(x,y)$-কে $|d(x,z)-d(z,y)|$-এর চেয়ে বেশী দেখানো। কাজটা দুভাগে ভেঙে করব, প্রথমে দেখাবো $d(x,y) \geq d(x,z)-d(z,y)$, তারপর দেখাব $d(x,y) \geq -[d(x,z)-d(z,y)]$. লক্ষ কর, এর মধ্যে একটা দেখালেই অন্যটাও হয়ে যাবে, কারণ একটার মধ্যে x,y-এর স্থানবিনিময় করলেই অন্যটা পেয়ে যাবে।

> We know by triangle inequality
>
> $$d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z) = d(x,y)+d(z,y),$$
>
> since $d(y,z)=d(z,y)$, or
>
> $$d(x,y) \geq d(x,z)-d(z,y). \tag{1}$$
>
> Interchanging x,y we get
>
> $$d(y,x) \geq d(y,z)-d(z,x),$$
>
> or
>
> $$d(x,y) \geq -[d(x,z)-d(z,y)], \tag{2}$$
>
> By (**1**) and (**2**),
>
> $$d(x,y) \geq |d(x,z)-d(z,y)|,$$
>
> as required.

■

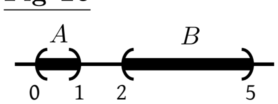
5.2 Distance

যদি (X,d) একটা metric space হয়, তবে X-এর যে কোনো দুটো element x,y-এর মধ্যে দূরত্ব মাপা যায় $d(x,y)$ দিয়ে। একই কায়দায় A আর B যদি X-এর দুটো subset হয়, তাহলে ওদের মধ্যেও দূরত্ব মাপা সম্ভব। ধরো, $X=\mathbb{R}$ আর d হল Euclidean metric. এবার দুটো subset নিই $A=(0,1)$ এবং $B=(2,5)$. Fig 26 দ্যাখো। যদি জিজ্ঞাসা করি ওদের মধ্যে দূরত্ব কত, তবে সহজ বুদ্ধিতেই বোঝা যাচ্ছে যে উত্তর হবে 1, কারণ ওদের মধ্যে ফাঁকটা লম্বায় 1. এইটাকে এইভাবেও ভাবা যায়--তোমাকে A থেকে লাফিয়ে B-তে যেতে হলে সবচেয়ে কম কতটা লাফিয়ে কাজটা তুমি করতে পারবে? এই চিন্তা থেকেই নীচের সংজ্ঞাটার জন্ম।

Example 15: Define distance between two sets in a metric space (X,d).[1] **(2012)**

SOLUTION:

Fig 26



DEFINITION: Distance between two sets

Let (X, d) be a metric space. Then the distance between two nonempty subsets $A, B \subseteq X$ is defined as

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b) \ : \ a \in A, \quad b \in B\}.$$

The infimum exists as the set is nonempty ($\because A, B \neq \phi$) and bounded from below (by 0).

■

এখানে একটা জিনিস লক্ষণীয়--দুটো set-এর মধ্যে দূরত্বের সংজ্ঞায় inf ব্যবহার করা হয়েছে, min নয়। তার কারণ এমন $a \in A$ এবং $b \in B$ নাও পাওয়া যেতে পারে, যাতে $d(a, b) = d(A, B)$ হয়। যেমন, যখন $A = (0, 1)$ আর $B = (2, 5)$ নিয়েছিলাম, তখন $d(A, B) = 1$ হয়েছিল, অথচ যাই $a \in (0, 1)$ এবং $b \in (2, 5)$ নাও, সব সময়েই $d(a, b) > 1$ হবে, কখনোই $d(a, b) = 1$ হবে না। অবশ্য যদি $A = (0, 1]$ এবং $B = [2, 5)$ নিতাম, তবে সে অসুবিধা থাকত না।

Exercise 18: ধরো $X = \{1, 2, 3\}$. এর উপর Euclidean metric-টার নাম দিলাম d. মানে $d(x, y) = |x - y|$. যদি $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$ আর $C = \{3\}$ নিই, তবে $d(A, B)$, $d(B, C)$ এবং $d(A, C)$ কত হবে? ■

Exercise 19: $\mathbb{R}$-এর মধ্যে কয়েকটা subset দিচ্ছি, $A = (0, 2), B = (1, 3)$ আর $C = (3, 20)$. এদের জন্য $d(A, B), d(B, C)$ এবং $d(A, C)$ বার কর। ■

এই অংকটা করার পর নীচের অংকটা খুবই সহজ--

Exercise 20: Let (X, d) be any metric space. Then which of the following statements is/are true? Justify your answer.

1. For every nonempty $A \subseteq X$ we must have $d(A, A) = 0$.
2. If A, B are distinct nonempty subsets of X, then we must have $d(A, B) > 0$.
3. For any two nonempty $A, B \subseteq X$ we must have $d(A, B) = d(B, A)$.
4. For any three nonempty $A, B, C \subseteq X$ we must have

$$d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B).$$

■

Exercise 21: নীচের বক্তব্য দুটোর মধ্যে ঠিক একটাই যেকোনো metric space (X, d) এবং যেকোনো $A, B \subseteq X$-এর জন্য সত্যি। কোনটা? যেটা সত্য নয়, তার জন্য একটা counterexample বার করতে পারো?

1. $A \cap B \neq \phi \implies d(A, B) = 0$.

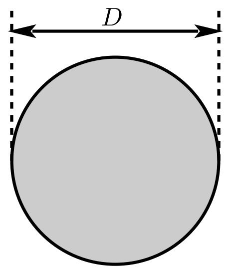


Fig 27

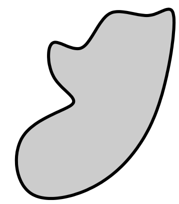


Fig 28

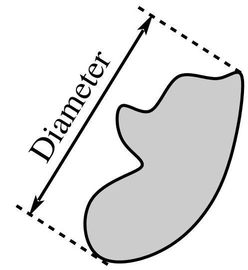


Fig 29

2. $d(A,B) = 0 \implies A \cap B \neq \phi$.

■

5.3 Diameter

Fig 27-এ একটা disk দেখানো হয়েছে (disk মানে বাংলায় যাকে বলে চাকতি)। এটা কত বড় সেটা মাপার একটা কায়দা হল ওটার diameter (ব্যাস) বার করা। কিন্তু যদি Fig 28-এর মত কিছু দিতাম, তার ক্ষেত্রেও কী diameter মাপা যাবে? হ্যাঁ, যাবে, কিন্তু এর জন্য diameter-এর ধারণাটাকে একটু generalise করতে হবে। একটা disk-এর diameter যদি D হয়, তবে disk-টায় দুটো point নিলে তারা পরস্পরের থেকে সবচেয়ে বেশী D দূরত্ব পর্যন্ত যেতে পারে। এই ধারণাটাকে কাজে লাগিয়ে আমরা অন্য set-এর বেলাতেও diameter বার করার চেষ্টা করতে পারি, নীচের অংকটার মত করে--

Example 16: Define diameter of a set in a metric space (X,d).[1] **(2012)**

SOLUTION:

> DEFINITION: **Diameter**
>
> Let (X,d) be a metric space. Then the <u>diameter</u> of a nonempty set $A \subseteq X$ is defined as
>
> $$\text{diam}(A) = \sup\{d(x,y) \ : \ x,y \in A\},$$
>
> if the sup exists. Otherwise, the diameter is defined to be ∞.

■

এই কায়দায় Fig 28-এর diameter বার করলে উত্তরটা হবে Fig 29-এর মত। আবার যদি ($\mathbb{R}$, Euclidean)-এর মধ্যে $\mathbb{Z}$-এর diameter বার করতাম, তবে পেতাম ∞, কারণ $\mathbb{Z}$ এখানে একটা unbounded set. যেকোনো metric space-এই আমরা bounded বা unbounded set-দের নিয়ে আলোচনা করতে পারি। সংজ্ঞাটা এইরকম--

> DEFINITION: **Bounded/unbounded set**
>
> Let (X,d) be a metric space. Then $A \subseteq X$ is called **bounded** if $A \subseteq N(x,r)$ for some $x \in X$ and some $r > 0$. Otherwise, A is called **unbounded**.

এই সংজ্ঞা থেকেই বুঝতে পারছ যে, $N(x,r)$-জাতীয় set-রা সকলেই bounded. আবার ϕ-ও bounded. নীচের অংকটা করলে diameter-এর সংজ্ঞা আর bounded/unbounded-এর সংজ্ঞা, দুটোই সড়গড় হয়ে যাবে।

Exercise 22: ধরো (X,d) একটা metric space, আর তার মধ্যে একটা set হল $A \neq \phi$. প্রমাণ করো $\text{diam}(A) < \infty$ হওয়া আর A-র bounded হওয়া সমার্থক। অর্থাৎ দুটো জিনিস দেখাতে হবে--$\text{diam}(A) < \infty$ হলে A-টা bounded হবে, এবং বিপরীতপক্ষে, A যদি bounded হয়, তবে $\text{diam}(A) < \infty$ হতে বাধ্য। ■

Diameter-এর সংজ্ঞাটা আরেকবার লক্ষ করো। সংজ্ঞাটায় আমরা sup ব্যবহার করেছি, max নয়। কারণটা বোঝা যাক--যদি জিজ্ঞাসা করি $(0,1)$ interval-টার দৈর্ঘ্য কত, তুমি নিশ্চয়ই বলবে 1, অর্থাৎ এই set-টার diameter হল 1. কিন্তু তুমি কী set-টার মধ্যে এমন দুটো x,y বার করতে পারবে, যাতে $d(x,y)=1$ হয়? না, তুমি যাই $x,y \in (0,1)$ নাও না কেন, $d(x,y) < 1$ হবে। সেই কারণেই আমরা সংজ্ঞাটায় sup ব্যবহার করেছি, max ব্যবহার না করে।

Exercise 23: ($\mathbb{R}$, Euclidean)-এর মধ্যে এই set-গুলোর diameter বার কর--
(*i*) $(0,1)\cup(2,3)$, (*ii*) $\mathbb{N}$, (*iii*) $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$, (*iv*) $(-1,1)\cap\mathbb{Q}$. ■

এর পরের অংকটার জন্য একটু প্রস্তুতি লাগবে। মনে কর $\mathbb{R}$-এর মধ্যে এই set-টা দিলাম-- $A \cup B$, যেখানে $A=[0,1]$ আর $B=[3,4]$. এর মধ্যে যদি দুটো point x,y দিতে বলি যাতে $d(x,y)$ যথাসম্ভব বেশী হয়, তবে তুমি নিশ্চয়ই 0 আর 4 নেবে, যাদের মধ্যে দূরত্ব হল $|4-0|=4$. মনে কর 0-তে একজন বসে আছে সে 4-এ পৌঁছতে চায়। এখন ও আছে $[0,1]$-এ ওকে যেতে হবে $[3,4]$-এ। সুতরাং একটা লাফ মারতেই হবে। কোথা থেকে লাফটা মারলে সবচেয়ে কম লাফে কাজ হয়? উত্তর হল 1 থেকে 3 পর্যন্ত লাফালে। এই লাফের দৈর্ঘ্যটাই হল $d(A,B)$. সুতরাং $0 \in A$ থেকে $4 \in B$-তে যাওয়ার একটা কায়দা হল--

1. প্রথমে A-র ভিতর দিয়ে 1-এ যাওয়া,
2. তারপর 1 থেকে 3-এ লাফ মারা,
3. তারপর 3 থেকে B-এর মধ্য দিয়ে 4-এ পৌঁছনো।

এর মধ্যে প্রথম ধাপটা পুরোই A-র মধ্যে, তাই ওই পথটার দৈর্ঘ্য $\text{diam}(A)$-র বেশী হতে পারে না। একইভাবে পথের তৃতীয় অংশের দৈর্ঘ্য সর্বাধিক $\text{diam}(B)$ হতে পারে। আর মাঝের লাফটা তো $d(A,B)$. সুতরাং আন্দাজ করতে পারছ যে, যেকোনো $a \in A$ থেকে যেকোনো $b \in B$-তে যাওয়ার জন্য কখনওই $\text{diam}(A)+d(A,B)+\text{diam}(B)$-র চেয়ে বেশী দূরত্ব পার করতে হবে না। অতএব

$$d(a,b) \leq \text{diam}(A)+d(A,B)+\text{diam}(B)$$

হতে বাধ্য। যেহেতু এটা যেকোনো $a,b \in A\cup B$-এর জন্যই খাটে, তাই

$$\text{diam}(A\cup B) \leq \text{diam}(A)+d(A,B)+\text{diam}(B).$$

ঠিক এটাই দেখাতে বলেছে নীচের অংকটায়।

Example 17: Prove that

$$d(A\cup B) \leq d(A)+d(B)+d(A,B),$$

where $d(A)$ denotes diameter of A, and $d(A,B)$ denotes distance between the sets A and B.[5] **(2012)**

SOLUTION: এখানে notation-টা একটু গোলমেলে, diam-কে d লিখেছে, আবার metric-টাকেও d লিখেছে। যদি $d(\cdots)$-এর ভিতরে দুটো জিনিস থাকে, তবে বুঝবে metric বোঝাচ্ছে, আর যদি একটা জিনিস থাকে তবে বুঝবে diameter বোঝাচ্ছে।

To show $d(A\cup B)\leq d(A)+d(B)+d(A,B)$, ie,

$\forall x,y\in A\cup B \quad d(x,y)\leq d(A)+d(B)+d(A,B)$.

এইটা কোথা থেকে এল বোঝা যাক। ধরো $M\subseteq\mathbb{R}$ যা খুশি একটা set. তবে $\sup(M)\leq 5$ বলাও যা, আর M is bounded above by 5 বলাও তা। ভালো করে বুঝে নাও যে দুটোই সমার্থক। আমাদের বেলায় $d(A\cup B)$ হল $\sup\{d(x,y) \ : \ x,y\in A\cup B\}$. তাই $d(A\cup B)\leq d(A)+d(B)+d(A,B)$ মানে হল--যাই $x,y\in A\cup B$ নাও না কেন, $d(x,y)\leq d(A)+d(B)+d(A,B)$ হতে বাধ্য।

$\forall x,y$ Take any $x,y\in A\cup B$.

আমাদের দেখাতে হবে যে $d(x,y)\leq d(A)+d(A,B)+d(B)$ হবে। যদি x,y দুজনেই A-র মধ্যে কিংবা দুজনেই B-র মধ্যে থাকে, তবে তো ঝামেলাই নেই, কোনো লাফালাফিই করতে হবে না।

Case 1: If both $x,y\in A$ then

$$d(x,y)\leq d(A)\leq d(A)+d(B)+d(A,B).$$

Case 2: If both $x,y\in B$ then

$$d(x,y)\leq d(B)\leq d(A)+d(B)+d(A,B).$$

যদি $x\in A$ আর $y\in B$ হয়, তবে আমরা সেই কায়দাটা লাগাব। প্রথমে দেখব কোন জায়গায় লাফটা মারলে সবচেয়ে কম লাফাতে হয়, মানে লাফের পরিমাণটা ঠিক $d(A,B)$ হয়। কিন্তু তাতে একটা সমস্যা আছে। সেটা হল $d(A,B)$-র সংজ্ঞায় inf থাকার জন্য। যদি ধরো $A=(0,1)$ আর $B=(2,3)$ নিই, তবে $d(A,B)=1$, কিন্তু এমন কোনো $a\in A$ আর $b\in B$ পাব না, যাতে $d(a,b)=1$ হয়! তাহলে? এই সমস্যাটা এড়াতে আমরা একটা অদ্ভুত কৌশল করব, যেটা না জানা থাকলে চট করে মাথায় আসা মুস্কিল। কৌশলটা অনেক জায়গাতেই কাজে লাগে, তাই ভালো করে একটা সহজ উদাহরণ দিয়ে শিখে রাখা যাক। বল তো এমন কী কী সংখ্যা $x\in\mathbb{R}$ আছে, যারা সব positive সংখ্যার চেয়েই ছোটো বা সমান? উত্তর হল যাবতীয় $x\leq 0$. তার মানে এই দুটো বাক্য সমার্থক--

- $x\leq 0$
- $\forall\epsilon>0 \quad x\leq\epsilon$.

সুতরাং দ্বিতীয়টাকে প্রমাণ করলেই প্রথমটাকেও প্রমাণ করা হয়ে যায়! ঠিক একই যুক্তিতে--

To show $d(x,y)\leq d(A)+d(A,B)+d(B)$.
Enough to show that

$\forall\epsilon>0 \quad d(x,y)\leq d(A)+d(A,B)+d(B)+\epsilon$.

$\forall\epsilon$ Take any $\epsilon>0$.

এইবার এমন $a\in A$ এবং $b\in B$ পাব, যাতে $d(a,b)\leq d(A,B)+\epsilon$ হবে। কেন, বুঝলে কি? এই যুক্তিটা ফার্স্ট ইয়ারে বার বার ব্যবহার করতে। ভুলে গিয়ে থাকলে মনে করিয়ে দিই। আমরা জানি

$$d(A,B)=\inf\{d(a,b) \ : \ a\in A, \ b\in B\}.$$

Infimum মানে হল সবচেয়ে বড় lower bound, তাই এর চেয়েও বড় কোনো সংখ্যা নিলে সেটা আর lower bound হতে পারে না। তাই $d(A,B)+\epsilon$-টা lower bound নয়, মানে এমন কোনো a, b পাবে যাতে $d(a,b)$ এর চেয়ে ছোটো হয়।

> Then $\exists a \in A, b \in B \quad d(a,b) \leq d(A,B)+\epsilon$.

এবার তবে লাফ মারার একটা জায়গা পাওয়া গেল--

> So by Δ-inequality,
>
> $$d(x,y) \leq d(x,a)+d(a,b)+d(b,y) \leq d(A)+d(A,B)+d(B)+\epsilon,$$
>
> as required, since $x, a \in A$ and $y, b \in B$.
>
> Case 4: If $x \in B, y \in A$ then the argument is similar.
>
> Thus $\forall x, y \in A \cup B \quad d(x,y) \leq d(A)+d(A,B)+d(B)$.
>
> So taking $\sup$ over $x, y \in A \cup B$ we have
>
> $$d(A \cup B) \leq d(A)+d(A,B)+d(B),$$
>
> as required.

■

DAY 6
একটা metric থেকে আরেকটা metric তৈরী

6.1 একই set-এর উপরে

এই অধ্যায়ের গোড়ায় আমরা রাস্তার ছবি দিয়ে তিনটে metric-এর কথা বলেছিলাম, জ্যামিতিক, পায় হাঁটা এবং গাড়ি করে যাবার দূরত্ব। এদের মধ্যে যে কোনো একটা নাও, এবং দূরত্বটা ইঞ্চিতে মাপো। তবে একটা metric পাবে, তাকে বলো d. যদি একই দূরত্ব সেন্টিমিটারে মাপতাম, তবে পেতাম আরেকটা metric. তাকে যদি $\bar{d}$ বলি, তবে বুঝতেই পারছ যে $\bar{d}(x,y)=2.54\times d(x,y)$ হবে। সেখান থেকেই নীচের অংকটার জন্ম।

Exercise 24: Let (X,d) be a metric space. Let $\bar{d}: X\times X\to\mathbb{R}$ be defined as

$$\bar{d}(x,y)=2.54\times d(x,y), \quad x,y\in X.$$

Show that $(X,\bar{d})$ is again a metric space.
HINT: শর্তগুলো অতি সহজেই পরীক্ষা করা যায়। ■

এখানে একটা metric d থেকে আমরা আরেকটা metric $\bar{d}$ তৈরী করলাম। এইভাবে নতুন metric বানানোর আরেকটা সহজ উদাহরণ দিলাম নীচে--

Exercise 25: Let d_1 and d_2 be two metrics on the same nonempty set X. Then show that d_1+d_2 is also a metric on X. ■

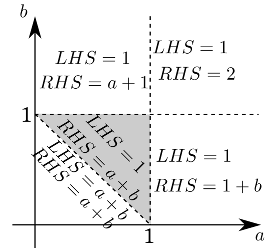


Fig 30

যখন ট্রেক করতে যাই, তখন প্রায়ই কোনো ছোটো পাহাড়ী গ্রামে গিয়ে জিজ্ঞাসা করতে হয়, অমুক জায়গাটা কত দূরে? অনেক সময়েই উত্তর শুনি--ওই তো এসেই গেছেন, আর এক মাইল। এক মাইলের অনেক বেশী হেঁটেও যখন গন্তব্যের টিকি দেখার আশাও ছেড়ে দিয়েছি, তখন হয়তো দেখা আরেক গ্রামবাসীর সঙ্গে। "দাদা, আর কত দূর?" "এই তো এসেই পড়েছেন", এক গাল হেসে জবাব, "আর এক মাইল!" অর্থাৎ এই মানুষদের metric-টা হল--হাতের কাছের জায়গাগুলোর দূরত্ব ঠিকঠাক জানলেও দূরের জায়গাগুলো সবই এক মাইল! নীচের অংকের metric-টা তৈরী এদের কথা ভেবেই।

Exercise 26: Let (X, d) be a metric space. Consider the function $d_1 : X \times X \to \mathbb{R}$ defined as

$$d_1(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}, \quad x, y \in X.$$

Show that (X, d_1) is also a metric space.
HINT: এখানে metric-এর সংজ্ঞার প্রথম শর্তদুটো পরীক্ষা করে দেখা খুবই সহজ। সমস্যা হতে পারে triangle inequality দেখানো নিয়ে। তার জন্য এই জিনিসটা মাথায় রাখলে সুবিধা হবে--

> ধরো $a, b \geq 0$ দুটো সংখ্যা। তাহলে $\min\{a+b, 1\} \leq \min\{a, 1\} + \min\{b, 1\}$ হবেই। প্রমাণটা করা যায় কয়েকটা কেসে ভেঙে নিয়ে। কিন্তু কেসগুলো গুলিয়ে যেতে পারে। তাই Fig 30-এর মত ছবি এঁকে নিলে সুবিধা হবে। যেমন ধরো একটা কেস বোঝাই, যেটা ছবিতে শেড করে দেখিয়েছি। এই কেসটা হল $a \leq 1$, $b \leq 1$ আর $a + b > 1$. এখানে LHS হল $\min\{a + b, 1\} = 1$, আর RHS হল $\min\{a, 1\} + \min\{b, 1\} = a + b$. যেহেতু এই কেসে $a + b > 1$, তাই LHS $<$ RHS হচ্ছে। একইভাবে বাকি কেসগুলোকেও মিলিয়ে দেখে নাও।

এইবার triangle inequality প্রমাণ করতে আর অসুবিধা হবার কথা নয়।
■

যারা এই metric-টা নিয়ে জীবন কাটিয়ে দেয়, তাদের কাছে পৃথিবীটা বড়ই ছোটো, সবই তো মাত্র এক মাইলের মধ্যে! তার মানে গোটা দুনিয়াটাই এক মাইল radius-এর একটা ball. এরকম আরেকটা metric-এর কথা বলেছি নীচের অংকটায়, এটাও দুনিয়াকে একটা এক মাইল radius-এর ball-এর মধ্যে পুরে ফেলে।

পৃথিবীটা নাকি ছোটো হতে হতে
স্যাটেলাইট আর কেব্‌লের হাতে
ড্রইং রুমে রাখা বোকা বাক্সতে বন্দী...

--মহীনের ঘোড়াগুলি

Example 18: Let (X, d) be a metric space. Show that (X, d_1) is also metric space where

$$d_1(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}.$$

[5] **(2012.11a)**
SOLUTION: যথারীতি তিনটে ধাপ--

Step 1: Shall show

◎ $\forall x, y \in X \quad d_1(x,y) \geq 0$, and $d_1(x,y) = 0 \iff x = y$.

$\forall x, y$ Take any $x, y \in X$.

$\because d(x,y) \geq 0, \ \therefore d_1(x,y) \geq 0$.

এবার দেখাব যে $d(x,y) = 0$ হওয়া মানে $x = y$ হওয়া--

Also,

$$\begin{aligned} d_1(x,y) = 0 &\iff \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = 0 \\ &\iff d(x,y) = 0 \\ &\iff x = y \quad [\because d \text{ is a metric}], \end{aligned}$$

as required.

এবার symmetry দেখাব--

Step 2: Shall show

◎ $\forall x, y \in X \quad d_1(x,y) = d_1(y,x)$.

$\forall x, y$ Take any $x, y \in X$.

Then

$$\begin{aligned} d_1(x,y) &= \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \\ &= \frac{d(y,x)}{1+d(y,x)} \quad [\because d(x,y) = d(y,x)] \\ &= d_1(y,x), \end{aligned}$$

as required.

সবশেষে triangle inequality–

Step 3: Shall show

◎ $\forall x, y, z \in X \quad d_1(x,y) \leq d_1(x,z) + d_1(z,y)$.

$\forall x, y, z$ Take any $x, y, z \in X$.

এবারকার ধাপগুলো খুব গুলিয়ে যেতে যায়। তাই সাবধানে মেপে মেপে পা ফেলব--

Let f be the function defined as

$$f(x) = \frac{x}{1+x}, \quad x \geq 0.$$

We first notice that if a, b, c are three nonnegative numbers with $a \leq b+c$, then

$$f(a) \leq f(b) + f(c). \qquad (*)$$

[[<u>Because:</u>

$$\begin{aligned} f(b)+f(c) &= \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} \\ &= \frac{b+c+2bc}{(1+b)(1+c)} \\ &= \frac{b+c+2bc}{1+b+c+bc} \end{aligned}$$

এখানে সমস্যা হতে পারে ওই bc-গুলোকে নিয়ে। সুতরাং ওদেরকে তাড়ানোর চেষ্টা করি। প্রথমে উপরের bc-টাকে তাড়াব নীচের bc-টা দিয়ে--

$$\begin{aligned} &= \frac{2(1+b+c+bc)-(2+b+c)}{1+b+c+bc} \\ &= 2 - \frac{2+b+c}{1+b+c+bc} \end{aligned}$$

উপরতলা থেকে bc-কে বিদায় করা গেছে। এবার নীচের তলার bc-টাকে তাড়াতে হবে। তার জন্য লক্ষ কর যে $bc \geq 0$, সুতরাং ওটাকে বাদ দিলে, নীচের তলাটা ছোটো হয়ে যাবে। ফলে পুরো fraction-টা বড় হবে। এদিকে fraction-টার আগে একটা মাইনাস আছে, সুতরাং সব মিলিয়ে আরও ছোটো হবে--

$$\begin{aligned} &\geq 2 - \frac{2+b+c}{1+b+c} \quad [\because bc \geq 0] \\ &= 2 - \left[1 + \frac{1}{1+b+c}\right] \\ &= 1 - \frac{1}{1+b+c} \\ &\geq 1 - \frac{1}{1+a} \quad [\because a \leq b+c] \\ &= \frac{a}{1+a} = f(a), \end{aligned}$$

as required.

]]

ব্যস্ পরিশ্রমের কাজটা শেষ। এবার ফসল কেটে ঘরে তোলার অপেক্ষা--

Now defining

$$a = d(x,y),$$
$$b = d(x,z),$$
$$c = d(z,y),$$

we have

$$d_1(x,y) = f(a),$$
$$d_1(x,z) = f(b),$$
$$d_1(z,y) = f(c).$$

Also, by triangle inequality of d, we have $a \leq b + c$. Hence, by (*),

$$f(a) \leq f(b) + f(c).$$

So

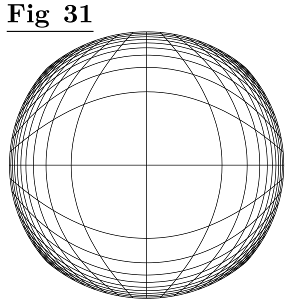
$$d_1(x,y) \leq d_1(x,z) + d_1(z,x),$$

as required.

■

এই অংকটা করতে সাধারণতঃ কারুরই বড় একটা ভালো লাগে না, বিশেষ করে ওই $f(a) \leq f(b) + f(c)$ দেখানোটা বেশ বিচ্ছিরি। M.C. Escher (এম সি এশার) নামে একজন মজার শিল্পী ছিলেন, তিনি নানারকম অদ্ভুত অদ্ভুত ছবি এঁকে বিখ্যাত হয়ে আছেন। তিনি কোথাও একটা এই metric-টার কথা শুনেছিলেন। তার ভিত্তিতে তিনি একটা মজার ছবি আঁকেন। ছবিটার নাম ছিল Infinity. একটু কাব্য করে বাংলা করলে বলা যায় "সীমার মাঝে অসীম"। আমরা জানি যে, $\mathbb{R}^2$ একটা অসীম ক্ষেত্র, কোথাও এর শুরু শেষ নেই, তুমি যত দীর্ঘ দূরত্বই ভাবো না কেন, $\mathbb{R}^2$-র মধ্যে তুমি এমন দুটো point পাবে, যাদের দূরত্ব তার চেয়েও বেশী। সুতরাং পুরো $\mathbb{R}^2$-কে কখনোই এক টুকরো কাগজে এঁকে ফেলা যাবে না। কিন্তু Escher বললেন যে, যদি আমি $\mathbb{R}^2$-র point-গুলোর দূরত্বদের d_1 দিয়ে আঁকি, তবে একটা 1 radius-এর circle-এর মধ্যেই পুরো $\mathbb{R}^2$-কে এঁটে দেওয়া যাবে, কারণ যে কোনো x, y-এর জন্যই $d_1(x,y) \leq 1$. আমরা ওনার কায়দায় একটা অসীম গ্রাফ কাগজকে এঁকেছি Fig 31-এ। Escher-এর ছবিটা অবশ্য আরো বেশী সুন্দর ছিল, কারণ উনি খালি গ্রাফ কাগজ আঁকেন নি, উনি এঁকেছিলেন একটা অসীম মোজাইকের মত ছবি, যার মধ্যে অনেক উড়ুক্কু মাছের মত প্রাণী ছিল। এই বইতে সেই ছবিটা ছেপে দেওয়ার ইচ্ছে ছিল। কিন্তু copyright-ঘটিত কারণে সেটা সম্ভব হচ্ছে না। তবে যারা ইন্টারনেট দেখতে জানো তারা Google-এ গিয়ে "Escher Infinity" দিয়ে খোঁজ করলেই অনায়াসে ছবিটা দেখতে পারো।
এই প্রসঙ্গে একটা নতুন ভাষা শিখে রাখো। এই যে বললাম "যে কোনো x, y-এর জন্যই $d_1(x,y) \leq 1$ হবে", এই জন্য

Fig 31



d_1-কে বলব একটা **bounded metric.** অবশ্য এখানে ≤ 1-এর মধ্যে 1 না হয়ে অন্য কিছু সংখ্যা থাকলেও চলত। মানে এমন কোনো একটা upper bound যদি থাকে, যাতে যাই x, y নাও না কেন, ওদের দূরত্ব সেই upper bound-এর বেশী হতে পারে না, তাহলেই metric-টাকে bounded বলব--

DEFINITION: Bounded metric space

A metric space (X, d) is called a <u>bounded metric space</u> if

$$\exists M > 0 \quad \forall x, y \in X \quad d(x, y) \leq M.$$

আমরা একটু আগে metric space-এর bounded subset-এর সংজ্ঞা দিয়েছিলাম। এই সংজ্ঞাটা সেই সংজ্ঞাটা ব্যবহার করেও দেওয়া যেত--একটা metric space (X, d)-কে bounded বলব যদি X নিজেই নিজের একটা bounded subset হয়।

আবার আমাদের অংকটার প্রসঙ্গে ফিরে আসি। সেখানে আসল কারসাজিটা ছিল $f(x)$-টাকে কায়দা করে নেওয়ার মধ্যে। এরকম অনেক $f(x)$ আছে, যাদের ক্ষেত্রেও এই একই ব্যাপার হয়, মানে $d(x, y)$ যদি একটা metric হয়, তবে $f(d(x, y))$-ও একটা metric হবে। যেমন $f(x) = \sqrt{x}$ নিলেও চলত। এরকম $f(x)$-এর খালি কয়েকটা বিশেষ গুণ থাকলেই চলবে--

- $f(x) = 0 \iff x = 0$ হতে হবে,
- f-কে nondecreasing হতে হবে,
- যে কোনো $a, b > 0$-এর জন্যই $f(a + b) \leq f(a) + f(b)$ হতে হবে। এরকম f-দের গ্রাফ দেখেই চেনা যায়, কারণ এদের গ্রাফ হয় Fig 32-এর মত, Fig 33-এর মত নয়।

Exercise 27: Let (X, d) be a metric space. Show that (X, d_1) is also metric space where

$$d_1(x, y) = \sqrt{d(x, y)}.$$

HINT: এখানে $f(x) = \sqrt{x}$ নিয়ে দ্যাখো $f(a + b) \leq f(a) + f(b)$ হচ্ছে কিনা, যেখানে $a, b > 0$. ■

নীচের অংকটা একই সুরের হলেও করতে অনেক বেশী সহজ--

Exercise 28: Let (X, d) be any metric space. Let $f : X \to X$ be any one-one function. Then show that $d_1(x, y) = d(f(x), f(y))$ must be a metric on X. ■

Fig 32

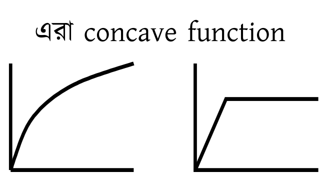
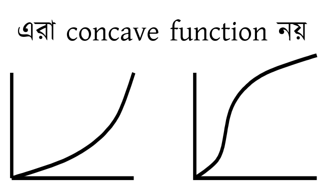


Fig 33



6.2 Sequence space

ধরো (X, d) একটা metric space. তাহলে $X \times X$-এর উপরে একটা metric হতে পারে এইরকম--

$$d_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d(x_1, y_1) + d(x_2, y_2).$$

একই কায়দায় আমরা $X^3 = X \times X \times X$-এর উপরেও একটা metric বানাতে পারি--

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{3} d(x_i, y_i),$$

যেখানে $x = (x_1, x_2, x_3)$ আর $y = (y_1, y_2, y_3)$. যদি এভাবে চলতেই থাকি, তবে আমরা X-এর যাবতীয় sequence-এর set-এর উপর পাব--

$$d_1(x, y) = \sum_{1}^{\infty} d(x_i, y_i),$$

যেখানে $x = \{x_i\}_i$ আর $y = \{y_i\}_i$. এটা কি একটা metric হবে? না, কারণ এই series-টা converge নাও করতে পারে! যেমন ধরো, যদি $d(x_i, y_i)$-গুলো বাড়তে বাড়তে ∞-র দিকে চলে যায়। সেটা অবশ্য আটকানো যায় যদি d-কে একটা bounded metric নিই, কারণ সেক্ষেত্রে x_i, y_i যেখানেই থাক, $d(x_i, y_i)$ একটা upper bound-এর নীচে থাকতে বাধ্য। কিন্তু তাও infinite series-টা converge নাও করতে পারে। ওকে জোর করে converge করানোর একটা কায়দা হল ওর লেজটাকে "টিপে সরু করে দেওয়া", এইভাবে--

$$d_1(x, y) = \sum_{1}^{\infty} \tfrac{1}{2^i} d(x_i, y_i),$$

এইবার কিন্তু converge করতে বাধ্য। সেটা নিয়েই এবারের অংকটা--

Example 19: Let X denote the set of all sequences of real numbers. If $x = \{\xi_i\}_i$ and $y = \{\eta_i\}_i$ are two elements of X, then show that

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|\xi_i - \eta_i|}{1 + |\xi_i - \eta_i|}$$

is a metric on X.[4] **(2008.11a)**

SOLUTION:

Step 1: Shall show

$\forall x, y \in X \quad \rho(x, y) \geq 0,$ and $\rho(x, y) = 0 \iff x = y.$

$\forall x, y$ Take any $x = \{\xi_i\}_i$ and $y = \{\eta_i\}_i \in X.$

Then the series defining $d(x, y)$ converges.

⟦ <u>Because:</u>

We know that $\sum 2^{-i} < \infty$. Also for each i,

$$0 \leq \frac{1}{2^i} \frac{|\xi_i - \eta_i|}{1 + |\xi_i - \eta_i|} \leq \frac{1}{2^i}.$$

Hence our series converges by comparison test.

⟧

We know that a convergent series of nonnegative terms must have nonnegative limit. So $\rho(x, y) \geq 0$.

Also, a series of nonnegative terms converges to 0 if and only if all the terms are 0.

So

$$\begin{aligned} \rho(x, y) = 0 \quad &\iff \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{2^i} \frac{|\xi_i - \eta_i|}{1 + |\xi_i - \eta_i|} = 0 \\ &\iff \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad \xi_i = \eta_i \\ &\iff \quad x = y, \end{aligned}$$

as required.

এবার symmetry দেখাব--

<u>Step 2:</u> Shall show

$\forall x, y \in X \quad \rho(x, y) = \rho(y, x).$

$\forall x, y$ Take any $x = \{\xi_i\}_i, y = \{\eta_i\}_i \in X$.

Then

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|\xi_i - \eta_i|}{1 + |\xi_i - \eta_i|} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|\eta_i - \xi_i|}{1 + |\eta_i - \xi_i|} = \rho(y, x),$$

as required, since $\forall t \in \mathbb{R} \quad |-t| = |t|$.

এবার triangle inequality-র পালা--

<u>Step 3:</u> Shall show

$\forall x, y, z \in X \quad \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y).$

$\forall x, y, z$ Take any $x = \{\xi_i\}_i, y = \{\eta_i\}_i$ and $z = \{\zeta_i\}_i \in X$.

Let f be the function defined as

$$f(x) = \frac{x}{1+x}, \quad x \geq 0.$$

We first notice that if a, b, c are three nonnegative numbers with $a \leq b+c$, then

$$f(a) \leq f(b) + f(c). \tag{*}$$

⟦ Because:

ঠিক এই জিনিসটাই আমরা আগে করেছিলাম Example (18)-এ। এটুকু সেখান থেকে তুলে হুবহু বসিয়ে দাও।

⟧

Now defining

$$\begin{aligned} a_i &= |\xi_i - \eta_i|, \\ b_i &= |\xi_i - \zeta_i|, \\ c_i &= |\zeta_i - \eta_i|, \end{aligned}$$

we have

$$\begin{aligned} \rho(x,y) &= \sum_1^\infty \frac{1}{2^i} f(a_i), \\ \rho(x,z) &= \sum_1^\infty \frac{1}{2^i} f(b_i), \\ \rho(z,y) &= \sum_1^\infty \frac{1}{2^i} f(c_i). \end{aligned}$$

Also, by triangle inequality of abs. value, we have $a_i \leq b_i + c_i$. Hence, by (*),

$$f(a_i) \leq f(b_i) + f(c_i).$$

So multiplying by $\frac{1}{2^i} > 0$ and summing,

$$\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,x),$$

as required.

■

এই অংকটা বুঝে থাকলে নীচের অংক কয়টাও অনায়াসে হবে।

Exercise 29: Let $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ denote the set of all mappings of $\mathbb{N}$ into $\mathbb{R}$, *i.e.*, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ is the sequence of

all real numbers. For $x, y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, define

$$d(x,y) = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left[\frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} \right],$$

where $x = \{x_n\}_n$ and $y = \{y_n\}_n$. Check that d is a metric on $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.[5] **(2010.11a)**

HINT:

এমনিতে এটা আগের অংকটাই। তবে এখানে ভাষায় একটা ভুল আছে। এখানে বলেছে "$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ is the sequence of all real numbers." বলা উচিত ছিল "$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ is the set of all sequences of real numbers."

■

নীচের অংক দুটো একই সুরের।

Exercise 30: Let (A, d) be a bounded metric space. Let X denote the set of all infinite sequences in A. For $x = \{x_n\}_n$ and $y = \{y_n\}_n \in X$ define

$$d_1(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d(x_n, y_n).$$

Then show that (X, d_1) is a metric space. ■

Exercise 31: Let (A, d) be a bounded metric space. Let $\sum r_n$ be a convergent infinite series of positive real numbers. Let X denote the set of all infinite sequences in A. For $x = \{x_n\}_n$ and $y = \{y_n\}_n \in X$ define

$$d_1(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} r_n d(x_n, y_n).$$

Then show that (X, d_1) is a metric space. ■

এইবার এই জিনিসটার একটা প্রয়োগ দেখি। আমরা আগের একটা অংক থেকে জানি যে $\mathbb{R}$-এর উপরে একটা bounded metric হল

$$d(x,y) = \min\{|x-y|, 1\}.$$

যদি এর সঙ্গে $\sum \frac{1}{3^n} < \infty$ ব্যবহার করি, তবেই নীচের অংকটার জন্ম হবে।

Exercise 32: Let X denote the set of all sequences of real numbers. Show that

$$\rho(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3^i} \min\{|\xi_i - \eta_i|, 1\}$$

is a metric on X, where $x = \{\xi_i\}_i$ and $y = \{\eta_i\}_i$ are elements of X. ■

Answers

5. $L = 0$ আসবে, তাই উত্তর হবে 8. **8.** $d(x,y) = \begin{cases} -x + 4y & \text{if } x \le 0,\ y > 0 \\ -y + 4x & \text{if } y \le 0,\ x > 0 \\ |x-y| & \text{if } x, y \le 0 \\ 4|x-y| & \text{if } x, y > 0 \end{cases}$ **11.** হ্যাঁ। **12.** না,

$d(x,y)=0$ হলেও $x=y$ নাও হতে পারে। Counterexample হিসাবে $x(t)\equiv 0$ আর $y(t)=\begin{cases} 1 & \text{if } x=\frac{1}{2} \\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$ নিলেই হবে। **13.** হ্যাঁ। **14.** না। যদি $x(t)=\begin{cases} 1 & \text{if } t\in[0,1] \\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$ আর $y(t)\equiv 1$ নিই, তবে $d(x,y)=0$, কিন্তু $x\neq y$. **15.** হ্যাঁ। যেহেতু continuous, তাই sup-টা $\mathbb{Q}\cap[0,1]$-এর উপর নেওয়াও যা, $[0,1]$-এর উপর নেওয়াও তাই। **18.** $d(A,B)=0,\ d(B,C)=0,\ d(A,C)=1$. **19.** $d(A,B)=0,\ d(B,C)=0,\ d(A,C)=1$. **20.** (i) ঠিক, (ii) ভুল, (iii) ঠিক, (iv) ভুল। **21.** প্রথমটাই খালি সত্যি। দ্বিতীয়টার একটা counterexample হল ($\mathbb{R}$, Euclidean)-এর মধ্যে $A=(0,1)$ এবং $B=(1,2)$. **22.** এই জিনিসটা কাজে দেবে--যদি $A\subseteq N(x,r)$ হয় তবে, $\forall a,b\in A\quad d(a,b)\leq d(a,x)+d(x,b)<2r$. **23.** (i) 3, (ii) ∞, (iii) 1, (iv) 2. **28.** কেন one-one লাগছে, সেটা খালি ধরিয়ে দিই, $d(f(x),f(y))=0 \iff f(x)=f(y) \iff x=y$, যেহেতু f-টা one-one.

Chapter II
Metric space-এর বিভিন্ন subset

DAY 7
Real analysis-এর উত্তরাধিকার (part 1)

Metric space-এর ধারণাটার জন্ম হয়েছে real analysis-এর থেকে। Real analysis-এ আমরা যে সব কায়দা ব্যবহার করি সেগুলোকে $\mathbb{R}$-এর বাইরেও খাটানো যায় কিনা, সেই চেষ্টা করতে গিয়েই লোকে metric space-এ এসে পৌঁছেছে। এই অধ্যায়ে real analysis এবং metric space-এর মধ্যে এই সাদৃশ্যটা বিশেষভাবে চোখে পড়বে। মনে হবে যেন first year-এ যে real analysis পড়েছিলে, সেটা প্রায় হুবহু এখানে তুলে দেওয়া হয়েছে! এখানেও open আর closed set আছে, limit point, derived set, closure, interior, boundary, ইত্যাদি সবার সঙ্গে আবার দেখা হবে। এবং সংজ্ঞাগুলোও দেখবে ঠিক আগের মতই। সুতরাং যদি real analysis-এর জিনিসগুলো ভালো করে শেখা থাকে, তবে খুব সুবিধা। অবশ্য first year-এর জিনিসগুলো মনে না থাকলেও কুছ্ পরোয়া নেই, যেখানে যেটুকু দরকার মনে করিয়ে দেব।

7.1 Ball খেলা

$\mathbb{R}$-এর মধ্যে আমরা দুটো সংখ্যা x, y-এর দূরত্ব মাপি absolute value, মানে $|x-y|$ দিয়ে। Metric space-এর বেলায় $|x-y|$-এর ভূমিকা পালন করবে $d(x,y)$. ব্যস্ এটুকুই পার্থক্য। বাকি প্রায় সবকিছুই গড়গড় করে real analysis-এর মতই এগোবে। বিশেষতঃ যদি তুমি আমাদের "বাংলায়-বোঝানো-ইংরাজী-বই" সিরিজের real analysis পড়ে থাকো, তবে মিলটা আরও বেশী করে চোখে পড়বে। কারণ আমরা সেই সব notation-ই ব্যবহার করব।
Real analysis-এ অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা পালন করে ϵ-neighbourhood-রা, যাদের সংজ্ঞা ছিল এই রকম--

$$N(a,\epsilon) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ |x-a| < \epsilon\},$$

মানে সেই সব সংখ্যা x যারা a থেকে $< \epsilon$ দূরত্বে আছে। এখানে দূরত্ব মাপলাম $|x-a|$ দিয়ে। যদি কোনো metric space (X,d)-তে কাজ করতাম, তবে দূরত্বটা $d(x,a)$ দিয়ে মাপতাম, সেক্ষেত্রে পেতাম নীচের সংজ্ঞাটা।

Example 1: Define an open sphere in a metric space (X,d). [1] **(2006)**

SOLUTION: একটা metric space-এর বেলাতেও ϵ-neighbourhood কথাটা চলে, তবে তার চেয়েও বেশী চলে open ball কথাটা, যাকে কেউ কেউ open sphere-ও বলে থাকে, যেমন এখানে বলেছে।

DEFINITION: Open sphere/open ball

Let (X, d) be a metric space. Then by an <u>open ball</u> or <u>open sphere</u> we mean a set of the form

$$N(a, \epsilon) = \{x \in X \ : \ d(a, x) < \epsilon\},$$

where $a \in X$ and $\epsilon > 0$. Here a is called the <u>centre</u> and ϵ is called the <u>radius</u> of the ball.

■

অনেক বইতেই দেখবে $N(a, \epsilon)$-কে $B(a, \epsilon)$ লেখে (যেহেতু B হল Ball-এর প্রথম অক্ষর)। চাইলে তুমিও তাই করতে পারো। তবে আমরা $N(a, \epsilon)$-ই লিখব, কারণ তাহলে real analysis-এর সঙ্গে সাদৃশ্যটা সহজে চোখে পড়বে।
Ball শব্দটা শুনলেই আমাদের মনে একটা গোলাকার বস্তুর চিত্র ভেসে ওঠে। তার কারণ আমরা প্রতিদিনের জীবনে সবচেয়ে বেশী কাজ করি $\mathbb{R}^3$-তে (যেটা আমাদের চারপাশের ত্রিমাত্রিক জগত) এবং $\mathbb{R}^2$-তে (যেমন খাতার পাতা কিংবা কম্পিউটার, টিভি, সিনেমার বা মোবাইলের পর্দা)। এই দুই ক্ষেত্রে যদি Euclidean metric নিয়ে কাজ করি, তবে ball-রা সত্যিই গোলাকারই হয়। কিন্তু অনেক metric space-এই ball-রা দেখতে একেবারে অন্যরকম হতে পারে! কয়েকটা উদাহরণ দেখি।

Example 2: মনে কর $X = \{1, 2, 4\}$ আর $d(x, y) = |x - y|$. তাহলে $N\left(2, \frac{1}{2}\right) = \{2\}$, কারণ 2 থেকে $< \frac{1}{2}$ দূরত্বের মধ্যে কেবল 2 নিজেই আছে। Fig 1 দ্যাখো। একই যুক্তিতে $N(2, 1) = \{2\}$. আবার Fig 2 দেখলেই বুঝবে যে $N\left(2, \frac{3}{2}\right) = \{1, 2\}$. ■

Example 3: যদি $X = \mathbb{R}^2$ নিই, এবং L_p metric নিয়ে কাজ করি, তবে $p > 0$-এর উপর নির্ভর করে ball-দের চেহারা বদলাবে। মনে কর আমরা $N((0, 0), 1)$ আঁকতে চাই। যদি $p = 2$ হয়, তবে তো সেটা Euclidean metric-ই হল, তাই সেক্ষেত্রে $N((0, 0), 1)$ হবে গোলাকার (Fig 3)। কিন্তু যদি $p = 1$ হয়, তবে

$$N((0, 0), 1) = \{(x, y) \ : \ |x| + |y| < 1\}.$$

ছবিতে সেটা হবে Fig 4-এর শেড করে দেখানো square-টার মত। যদি $p \in (1, 2)$ হয়, তবে ball-টা হবে Fig 3 আর Fig 4-এর মাঝামাঝি কিছু একটা, যেমনটা শেড করে দেখিয়েছি Fig 5-এ। দেখতেই পাচ্ছ p যত কমছে, ball-টা ততই চিমসে যাচ্ছে। যদি $p \in (0, 1)$ নিই, তবে Fig 6-এর শেড করা জায়গাটার মত হবে। আর $p > 2$ হলে Fig 7-এর শেড করা জায়গাটার মত। বাড়তে বাড়তে $p \to \infty$ নিলে? তখন পাব L_∞-র ball, যেটা দেখতে Fig 8-এর মত। ■

Fig 1

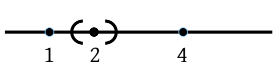


Fig 2

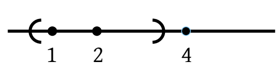


Fig 3

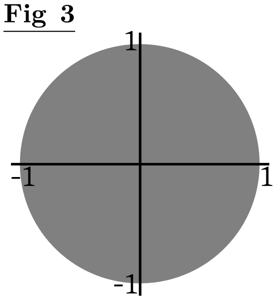
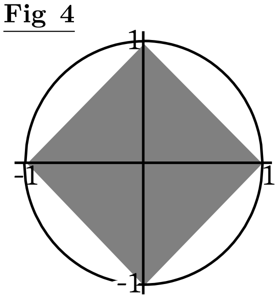


Fig 4



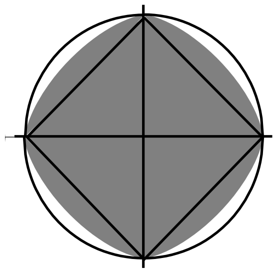


Fig 5

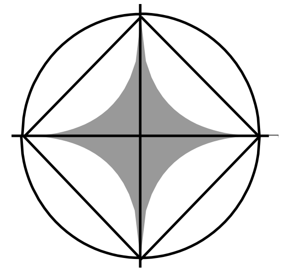


Fig 6

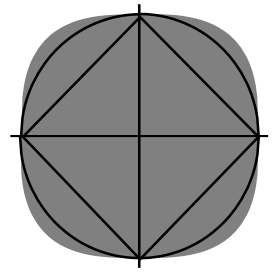


Fig 7

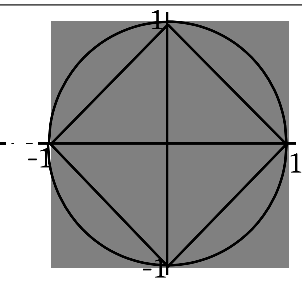


Fig 8

গত অধ্যায়ে একটা অংক দিয়েছিলাম বাস আর রিক্সা দিয়ে। Set-টা ছিল $\mathbb{R}$. যেটাকে একটা লম্বা লাইন বলে কল্পনা করেছিলাম। 0-র বাঁদিকে বাস চলে (ভাড়া একক দূরত্বে 1 টাকা), আর 0-র ডানদিকে চলে রিক্সা (ভাড়া একক দূরত্বে 4 টাকা)। এখানে $N(0,8)$ কী হবে? মানে 8 টাকার চেয়ে কম খরচায় 0 থেকে কী কী জায়গায় ঘুরতে যাওয়া যায়? যদি বাঁদিকে যাও, তবে $8/1 = 8$ দূরত্বের মধ্যে থাকতে হবে। আর ডানদিকে থাকতে হবে $8/4 = 2$ দূরত্বের মধ্যে। তার মানে এই metric-এ $N(0,8) = (-8,2)$.
এবার আরেকটা উদাহরণ দেখি। এই metric space-টাও আগের অধ্যায়ে দিয়েছিলাম--

Example 4: $X = \mathbb{R}$ নেব। যথারীতি $\mathbb{R}$-কে একটা লম্বা লাইন বলে ভাবো। 0-তে একটা পুলিশ চেকপোষ্ট আছে। যদি কোনো x থেকে y-তে যেতে চাও $(x \neq y)$, তবে তোমাকে চেকপোষ্ট হয়ে যেতে হবে। এই metric-এ $d(x,y) = |x| + |y|$. এবার বল তো $N(2,1)$ কী হবে? মানে একটা লোক 2-তে আছে, ও খালি < 1 দূরত্ব হাঁটতে পারে। তাহলে ও কোন কোন জায়গায় যেতে পারবে? উত্তর হল কোথাও যেতে পারবে না, খালি 2-তেই দাঁড়িয়ে থাকতে হবে, কারণ সামান্য একটু নড়তে গেলেই তো পুলিশ চেকপোষ্টে জানাতে হবে, সেটাই তো 1-এর চেয়ে বেশী দূরত্বে! সুতরাং $N(2,1) = \{2\}$. ■

Exercise 1: এবার বল তো এই পুলিশ চেকপোষ্টের উদাহরণে $N(2,3)$ কী হবে? ■

আরেক ধরণের উদাহরণ দেখা যাক।

Example 5: আমরা কাজ করব $C[0,1]$ নিয়ে। আমাদের metric-টা হবে sup-metric. তোমাকে বলতে হবে $N\left(f, \frac{1}{3}\right)$ কীরকম দেখতে, যেখানে $f(t) = t^2$.
SOLUTION: প্রথমে $f(t) = t^2$-এর ছবি এঁকেছি Fig 9-এ। এইটা হল গিয়ে $N\left(f, \frac{1}{3}\right)$-এর centre. এর থেকে $< \frac{1}{3}$ দূরত্বে যেসব গ্রাফ আছে তাদের set-টাই হল $N\left(f, \frac{1}{3}\right)$. ছবিতে বোঝানোর জন্য $f(t)$-র গ্রাফটাকে কেন্দ্র করে একটা টিউব এঁকেছি (Fig 10), উপরে $\frac{1}{3}$ আর নীচেও $\frac{1}{3}$ দূরত্ব পর্যন্ত। সুতরাং $C[0,1]$-এর যেসব সদস্যের গ্রাফ ওই টিউবের মধ্যে থাকবে (টিউবের দেওয়াল ছুঁলে চলবে না), তাদের নিয়েই তৈরী $N\left(f, \frac{1}{3}\right)$. ■

Fig 9

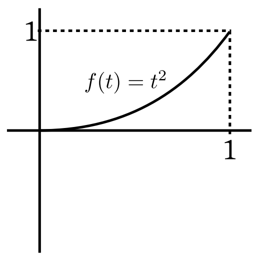
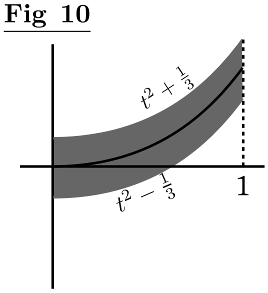


Fig 10



7.2 Open set

Open set-এর সংজ্ঞা আমরা real analysis-এ কী শিখেছিলাম? সেই সব set যাদের প্রতিটা point-কে ঘিরেই একটা neighbourhood আছে set-টার মধ্যেই, মানে কোথাও দেওয়ালে পিঠ ঠেকে যাবার ভয় নেই। Metric space-এর বেলাতেও ঠিক একই সংজ্ঞা--

Example 6: Define an open set in a metric space (X,d).[1] **(2006)**

SOLUTION:

> **DEFINITION: Open set**
>
> Let (X,d) be a metric space. Then $A\subseteq X$ is called an <u>open set</u> in (X,d), if
> $$\forall a\in A\quad \exists\epsilon>0\quad N(a,\epsilon)\subseteq A,$$
> where
> $$N(a,\epsilon)=\{x\in X\ :\ d(a,x)<\epsilon\}.$$

■

Real analysis শেখার সময়ে আমরা শিখি, যেকোনো open interval-ই হল একটা open set. যেমন (a,b)-কে open দেখানোর কায়দাটা ছিল এইরকম--প্রথমে যে কোনো একটা $x\in(a,b)$ নাও। তার পর এমন একটা $\epsilon>0$ বার করো, যাতে $N(x,\epsilon)\subseteq(a,b)$ হয়। এরকম একটা ϵ ছিল $\epsilon=\min\{x-a,b-x\}$, মানে x থেকে (a,b)-এর নিকটতম প্রান্তের দূরত্ব (Fig 11)। যেকোনো metric space-এর ক্ষেত্রেই একই রকম যুক্তি খাটে। এটাই নীচের অংকটার বক্তব্য।

Example 7: Show that every open sphere in (X,d) is an open set.[3] **(2006)**

SOLUTION: Open sphere-রা দেখতে সবাই $N(a,r)$-এর মত, যেখানে $a\in X$ এবং $r>0$. সেরকম একটা জিনিস নিয়ে শুরু করি--

> Let $N(a,r)\subseteq X$ be an open sphere. Shall show that it is open in X, ie,
>
> ◎ $\forall x\in N(a,r)\quad\exists\epsilon>0\quad N(x,\epsilon)\subseteq N(a,r).$
>
> $\forall x$ Take any $x\in N(a,r)$.
>
> Then $d(a,x)<r$.

Fig 11

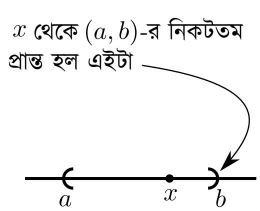


Fig 12

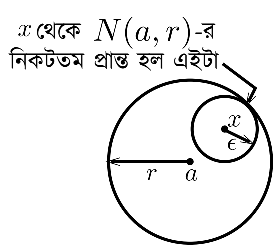
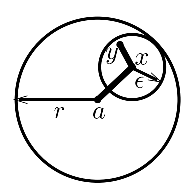


Fig 13



$\boxed{\exists\epsilon}$ Choose $\epsilon = r - d(a,x) > 0$.

এভাবে কেন নিলাম সেটা Fig 12 থেকে দ্যাখো। আমাদের কাজ ছিল এটা খেয়াল রাখা যাতে open sphere-টার বাইরে চলে না যাই। লক্ষ কর x থেকে open sphere-টার সীমানার সবচেয়ে কাছের point-এর দূরত্ব হল $r - d(a,x)$.
এবার দেখাব $N(x,\epsilon) \subseteq N(a,r)$, মানে $N(x,\epsilon)$-র যে কোনো একটা element নিয়ে দেখাব যে সেটা $N(a,r)$-এও আছে।

Take any $y \in N(x,\epsilon)$.

Fig 13 দ্যাখো। এবার triangle inequality, মানে সেই প্রথম অধ্যায়ের কনুইয়ের গল্প। এখানে a হল কাঁধ, x হল কনুই আর y হল কব্জি। কাঁধের থেকে কনুইয়ের দূরত্ব হল $d(a,x)$. ওদিকে কনুই থেকে কব্জি আছে $< \epsilon$ দূরত্বের মধ্যে, সুতরাং কব্জিটা কাঁধ থেকে আর কত দূরে যাবে?

Then, by Δ-inequality,

$$\begin{aligned} d(a,y) &\le d(a,x) + d(x,y) \\ &< d(a,x) + \epsilon \quad [\because y \in N(x,\epsilon)] \\ &= d(a,x) + \big(r - d(a,x)\big) = r. \end{aligned}$$

So $y \in N(a,r)$.
By the arbitrariness of $y \in N(x,\epsilon)$, we have $N(x,\epsilon) \subseteq N(a,r)$, as required.

■

Real analysis-এ শিখেছিলাম যে ϕ এবং $\mathbb{R}$ দুজনেই open set. যে কোনো metric space (X,d)-তেও একই যুক্তিতে দেখাব যে ϕ এবং X দুজনেই open set.

Example 8: In a metric space (X,d) show that the empty set ϕ and the whole space X are open sets.[4] **(2007.12c)**

SOLUTION:

Shall show that ϕ is an open set in (X,d), ie,

$$\forall a \in \phi \quad \exists \epsilon > 0 \quad N(a,\epsilon) \subseteq \phi.$$

But since ϕ contains no element, this statement is vacuously true.
Hence ϕ is an open set in (X,d), as required.

এবার পুরো X-কে open দেখাব।

Shall show that X is an open set in (X,d), ie,
$\forall a \in X \quad \exists \epsilon > 0 \quad N(a,\epsilon) \subseteq X.$

Metric space মাত্রেই nonempty হয়, তাই--

$\forall a$ $\because X \neq \phi$, take any $a \in X$.

এবার এমন $\epsilon > 0$ চাই, যাতে $N(a, \epsilon)$ থাকে X-এর মধ্যেই। কিন্তু আমাদের জগতটাই তো এখানে X-এর মধ্যে সীমাবদ্ধ। অতএব যাই $\epsilon > 0$ নিই না কেন, $N(a, \epsilon) \subseteq X$ হতে বাধ্য। ধরো $\epsilon = 1$ নিলাম--

$\exists \epsilon$ Choose $\epsilon = 1 > 0$.

Then $N(a, \epsilon) = \{x \in X \ : \ d(a, x) < 1\}$.

Hence, by definition, $N(a, \epsilon) \subseteq X$, as required.

■

নীচের অংকটাও real analysis শেখার সময়ে দেখেছো। প্রমাণটাও ঠিক একইরকম।

Example 9: Prove that in a metric space (X, d) any finite intersection of open sets in (X, d) is open in (X, d). Will the result remain valid if the word 'finite' is replaced by the word 'infinite'? Justify your answer.[5] **(2009.11b)**

SOLUTION:

Let $A_1, ..., A_n$ be open in (X, d).

Shall show that $A = A_1 \cap \cdots \cap A_n$ is open in (X, d), ie,

$\forall a \in A \quad \exists \epsilon > 0 \quad N(a, \epsilon) \subseteq A$.

If $A = \phi$, this is vacuously true.

$\forall a$ Otherwise, take any $a \in A$.

যেহেতু $A = \cap A_i$, তাই "$x \in A$" মানে a-টা সবগুলো A_i-তেই আছে। Fig 14 দ্যাখো।

Then $\forall i \in \{1, ..., n\} \quad a \in A_i$.

$\because A_i$ is open, $\exists \epsilon_i > 0 \quad N(a, \epsilon_i) \subseteq A_i$.

Fig 15, Fig 16 আর Fig 17-এ এরকম তিনটে ϵ_i দেখিয়েছি। এদের মধ্যে কোনোটা বড়, কোনোটা ছোটো। যদি সবচেয়ে ছোটোটা নিই, তবে তার জন্য যে ball-টা পাব, সেটা সবগুলো A_i-এর ভিতরেই দিব্যি ঢুকে যাবে।

Fig 14

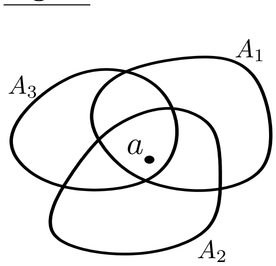


Fig 15

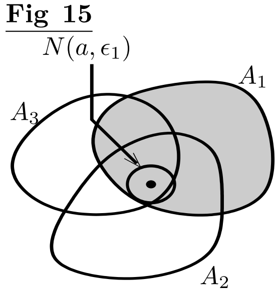


Fig 16

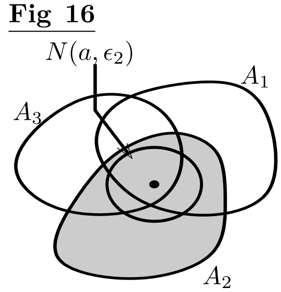
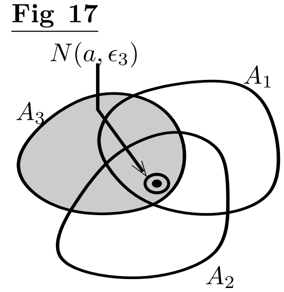


Fig 17



$\boxed{\exists\epsilon}$ Choose $\epsilon = \min\{\epsilon_1, ..., \epsilon_n\} > 0.$

এবার আমরা দেখাব $N(a,\epsilon) \subseteq A$. তার জন্য যেকোনো $x \in N(a,\epsilon)$ নিয়ে দেখাব যে $x \in A$ হচ্ছে--

Take any $x \in N(a,\epsilon)$.
Then

$$\forall i \in \{1, ..., n\} \quad x \in N(a,\epsilon) \subseteq A_i.$$

So $x \in A_1 \cap \cdots \cap A_n = A$.
Since $x \in N(a,\epsilon)$ is arbitrary, $N(a,\epsilon) \subseteq A$, as required.

এবার দেখতে বলেছে যে "finite"-এর বদলে "infinite" থাকলে কী হত। ভালো করে দেখে নিই আমাদের প্রমাণে finite শর্তটা কোথায় লেগেছে। আমাদের হাতে অনেকগুলো $\epsilon_i > 0$ ছিল, আমরা তাদের মধ্যে সবচেয়ে ছোটোটাকে ϵ নাম দিয়েছিলাম, এবং দাবী করেছিলাম যে $\epsilon > 0$ হবে। এখানেই finite শর্তটা কাজে লেগেছিল। যদি infinite-সংখ্যক ϵ_i থাকত, তবে এই কাজটা নাও করা যেতে পারত। যেমন যদি এইরকম হত--

$$\epsilon_1 = 1, \quad \epsilon_2 = \tfrac{1}{2}, \quad \epsilon_3 = \tfrac{1}{3}, \quad \epsilon_4 = \tfrac{1}{4}, \ldots,$$

তবে প্রতিটা $\epsilon_i > 0$ হলেও এমন কোনো $\epsilon > 0$ পাওয়া অসম্ভব যেটা ওদের সবার থেকেই $\leq$ হয়।

<u>Second part:</u>

No, the result will not remain valid if the word `finite' is replaced by the word `infinite'.
<u>Counterexample:</u> Let $X = \mathbb{R}$ with usual metric. Then the sets $A_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ for $n \in \mathbb{N}$, are open in X.
But their intersection

$$\cap_1^\infty A_n = \{0\}$$

is not open in X.

⟦ <u>Because:</u>

$$\forall \epsilon > 0 \quad N(0,\epsilon) \not\subseteq \{0\}.$$

⟧

■

7.3 Closed set

Real analysis শেখার সময়ে দেখেছো যে closed set-এর সংজ্ঞা দুভাবে দেওয়া যায়--

- এক, open set-এর complement হিসেবে--

  "$A \subseteq \mathbb{R}$ is called closed in $\mathbb{R}$ if $\mathbb{R} \setminus A$ is open in $\mathbb{R}$."

- আর দুই, limit point দিয়ে--

  "$A \subseteq \mathbb{R}$ is called closed in $\mathbb{R}$ if A contains all its limit points."

এই দুটো সংজ্ঞাই সমার্থক। ঠিক একই ব্যাপার হয় যেকোনো metric space-এও--

> DEFINITION: **Closed set (defn 1)**
>
> Let (X, d) be a metric space. Then $A \subseteq X$ is called a closed set in X if $X \setminus A$ is an open set in X.

Limit point দিয়ে সংজ্ঞাটা এখনই দিতে পারছি না, কারণ metric space-এর বেলায় limit point-এর সংজ্ঞাই আমরা এখনও শিখি নি। আপাততঃ নীচের অংকটায় তোমাকে প্রথম সংজ্ঞাটাই ব্যবহার করতে বলেছে। এই সংজ্ঞাটায় যেহেতু আমরা open set ব্যবহার করে closed set বানাই, তাই এই সংজ্ঞা ব্যবহার করে open set-এর বিভিন্ন ধর্ম থেকে closed set-এর বিভিন্ন ধর্ম সহজে পাওয়া যায়। নীচের অংকটাই এর একটা উদাহরণ।

Example 10: A subset A of a metric space (X, d) is said to be closed if $X - A$ is an open set. Show that an arbitrary union of open sets is open and an arbitrary intersection of closed sets is closed.[5] **(2008.12c)**

SOLUTION:

First part: Arbitrary union of open sets is open:

Let $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ be an arbitrary collection of open subsets of a metric space (X, d), where I is any nonempty index set.

এই notation-টা দেখে ঘাবড়ে যেও না। যদি ধরো তিনটে set থাকত, তবে তাদেরকে A_1, A_2, A_3 লেখা যেত। এদের সবারই চেহারা A_α-র মত, যেখানে $\alpha \in \{1, 2, 3\}$. এই $\{1, 2, 3\}$-কে বলে **index set**. আমরা এখানে যা খুশি collection নিয়ে কাজ করছি, তাই আমাদের index set-টাও যেকোনো $I \neq \phi$ হতে পারে।

Shall show that $A = \cup_{\alpha \in I} A_\alpha$ is open in X, ie,

◎ $\forall a \in A \quad \exists \epsilon > 0 \quad N(a, \epsilon) \subseteq A.$

$\forall a$ Take any $a \in A$.

$\because A = \cup_{\alpha \in I} A_\alpha$,

$\therefore a \in A_\alpha$ for some $\alpha \in I$.

$\because A_\alpha$ is open in X,

$\therefore \exists \epsilon > 0 \quad N(a, \epsilon) \subseteq A_\alpha$.

$\exists \epsilon$ Choose this $\epsilon > 0$.

তাহলে $N(a, \epsilon)$ আছে A_α-র মধ্যে, আর A_α নিজে আছে A-র মধ্যে--

Then $N(a, \epsilon) \subseteq A_\alpha \subseteq A$, as required.

এবার দ্বিতীয় অংশ। এখানে আমরা প্রথম অংশটাই ব্যবহার করব, de Morgan's law-এর মাধ্যমে।

Second part: Arbitrary intersection of closed sets is closed:

Let $\{B_\beta \ : \ \beta \in J\}$ be an arbitrary collection of closed sets in X.
Shall show that $\cap_{\beta \in J} B_\beta$ is closed in X.
$\because B_\beta$'s are closed in X,
$\therefore B_\beta^c$ are open in X.

এখানে B_β^c বলতে বোঝাচ্ছি $X \setminus B_\beta$. সেটা লিখে দেওয়া ভালো--

Here for any subset $A \subseteq X$ we denote $X \setminus A$ by A^c.
Now

$$\begin{aligned} B^c &= \Big(\bigcap_{\beta \in J} B_\beta\Big)^c \\ &= \bigcup_{\beta \in J} B_\beta^c \quad \Big[\text{by de Morgan}\Big] \end{aligned}$$

But we know from the first part that arbitrary union of open sets is open. So $\bigcup_{\beta \in J} B_\beta^c$ is open.
$\because B^c$ is open,
$\therefore B$ is closed, as required.

■

Exercise 2: If A_1 and A_2 are closed sets in a metric space (X, d), show that $A_1 \cup A_2$ is also closed.[3] **(2007.12d)**
HINT:
আগের দুটো অংকের কায়দাতেই এই অংকটাও করা যাবে। এটা তোমার জন্য রেখে দিলাম, খালি শুরুটা একটু ধরিয়ে দিই। $B_i = A_i^c$ নাও। তাহলে B_i-গুলো open হবে। সুতরাং Example 9-এর কায়দাতে $B_1 \cap B_2$-কে open দেখাতে পারবে। এবার de Morgan লাগালে পাবে

$$(B_1 \cap B_2)^c = A_1 \cup A_2.$$

সব কিছু গুছিয়ে লেখার দায়িত্ব তোমার। ■

আরেকটা অংক দিই তোমার নিজে নিজে করার জন্য।

Exercise 3: Let A be an open subset and B be a closed subset of a metric space. Show that $B \setminus A$ is a closed set. ■

Exercise 4: Let A be an open subset and B be a closed subset of a metric space. Is it true that $A \setminus B$ is an open set? ■

এবার একটা সহজ প্রশ্ন।

Exercise 5: Is it true that in any metric space (X, d) the sets ϕ and X are both closed? ■

Exercise 6: আমরা জানি যে ($\mathbb{R}$, Euclidean)-এর মধ্যে singleton set-রা সবাই একেকটা closed set. যেকোনো metric space-এই কি তাই হয়? ■

DAY 8
Real analysis-এর উত্তরাধিকার (part 2)

8.1 Hausdorff property

এবার একটা অংক করব যেটা ছবি দিয়ে বুঝতে একেবারেই সহজ। ধরো দুটো যে কোনো বিন্দু দিলাম, যাদের মধ্যে খানিকটা ফাঁক আছে (Fig 18)। তোমার কাজ হল ওদেরকে ঘিরে দুটো গোল আঁকা, যাতে গোলদুটো পরস্পরের ঘাড়ের উপর গিয়ে না পড়ে, খালি ছুঁয়ে থাকলে আপত্তি নেই। মানে Fig 19-এর মত হলে চলবে না, Fig 20-র মত হলে ঠিক আছে। কী করে করবে? সহজ উত্তর হল ওদেরকে কেন্দ্র করে এমন দুটো গোল আঁকবে যাদের radius দুটোর যোগফল বিন্দু দুটোর দূরত্বের চেয়ে বেশী না হয়। যেমন, বিন্দু দুটোর দূরত্ব যদি $\epsilon > 0$ হয়, তবে চাইলে দুটো গোলের radius-ই তুমি সমান নিতে পারো, খালি $\leq \frac{\epsilon}{2}$ হলেই হবে। যে কোনো metric space-এই এই কাজটা করা যাবে। এই যে কাজটা করা গেল এই শর্তটার একটা নাম আছে--**Hausdorff property** (হাউসডর্ফ প্রপার্টি)[1]। এই অতি মামুলী জিনিসটার এমন একটা জাঁদরেল নাম শুনে হাসি পেতে পারে। কিন্তু এই শর্তটা আসলে খুবই গুরুত্বপূর্ণ। কেন গুরুত্বপূর্ণ সেটা বোঝানো অবশ্য এই বইয়ের পাল্লার মধ্যে সম্ভব নয়। যাই হোক, এই শর্তটাই প্রমাণ করতে বলেছে নীচের অংকটায়।

Example 11: In a metric space (X, d) if $a, b \in X$ and $a \neq b$, then show that there exist open balls S_a and S_b containing a and b, respectively, such that $S_a \cap S_b = \phi$.[3] **(2012.11ci,2010.11ci)**

SOLUTION:

> Given $a, b \in X$ with $a \neq b$.
>
> Let $\epsilon = d(a, b) > 0$.
>
> Choose $S_a = N(a, \epsilon/2)$ and $S_b = N(b, \epsilon/2)$.

[1]Felix Hausdorff একজন বিখ্যাত জার্মান গণিতজ্ঞের নাম।

Fig 18

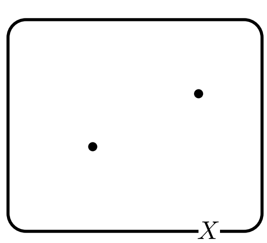


Fig 19

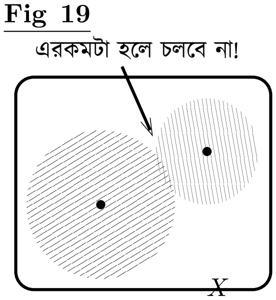
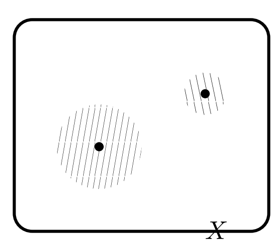


Fig 20



Then S_a and S_b are open balls containing a and b, respectively.

Also $S_a \cap S_b = \phi$.

⟦ <u>Because:</u>

Let, if possible, $x \in S_a \cap S_b$.
Then $d(a,x) < \frac{\epsilon}{2}$ and $d(b,x) < \frac{\epsilon}{2}$.
So

$$\begin{aligned} d(a,b) &\leq d(a,x) + d(x,b) \\ &= d(a,x) + d(b,x) \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon (\Rightarrow\Leftarrow \because d(a,b) = \epsilon). \end{aligned}$$

⟧

■

তোমার করার জন্য একইরকমের দুটো অংক দিই।

Exercise 7: (X,d) একটা metric space. তার মধ্যে A একটা closed set আর $b \in X$ রয়েছে A-র বাইরে। প্রমাণ করো x-কে ঘিরে এমন একটা neighbourhood S আছে, যাতে $S \cap A = \phi$ হয়। ■

Exercise 8: আগের অংকে যদি A-টা closed না দিতাম, তবে কি একই কথা জোর দিয়ে বলা যেত? ■

8.2 Interior

আমরা real analysis-এ interior point এবং interior of set-এর কথা শিখেছিলাম। এখানেও ঠিক একই সংজ্ঞা কাজ করবে। ভুলে গিয়ে থাকলে নীচের সমাধানটা দেখে নাও--

Example 12: What is meant by (i) interior point (ii) interior of a set in a metric space?[1+1]

(2008)

SOLUTION:

DEFINITION: **Interior point**

Let A be a subset of a metric space. Then $a \in A$ is called an <u>interior point</u> of A if

$$\exists \delta > 0 \quad N(a,\delta) \subseteq A.$$

DEFINITION: Interior set

Let A be a subset of a metric space. Then the <u>interior set</u> A° of A is defined as the set of all interior points of A.

■

একটা set-এর interior set বলতে যে চিত্রটা মনে রাখবে সেটা হল set-টার ভিতরে <u>গভীরে</u> যে সব point আছে, তাদের set. এই চিত্রটা অবশ্যই খুব বিদ্‌ঘুটে metric space-দের বেলায় খাটে না। ঠিক যেমন খুব বিদ্‌ঘুটে metric space-দের বেলায় ball-দেরও দেখতে মোটেই ball-এর মত হয় না। Metric space-এর যাবতীয় term তৈরী করা হয়েছে $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2$ বা $\mathbb{R}^3$-র উপরে Euclidean metric-এর কথা মাথায় রেখে, কারণ এগুলোই আমাদের অনুভূতির সবচেয়ে কাছের জিনিস। তাই metric space-এর যে কোনো ধারণাই মনে রাখার চেষ্টা করবে $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2$ বা $\mathbb{R}^3$-র উপর Euclidean metric-এর জন্য। এইভাবে দেখলে একটা set-এর interior হল তার শাঁস। খোসাটা বাদ দিয়ে যেটুকু থাকে। যেমন Fig 21-এ একটা আমের মত set দেখিয়েছি। এটা রয়েছে $\mathbb{R}^2$-এর মধ্যে। লক্ষ কর এই set-টার খোসাটা কিছু জায়গায় set-এর মধ্যে আছে, কিছু জায়গায় নেই। যদি খোসাটা পুরো ছাড়িয়ে ফ্যালো, তবে পাবে interior-টা, যেটা দেখিয়েছি Fig 22-এ। এই প্রসঙ্গে বলি যে আমরা যাকে খোসা বললাম, অংকের ভাষায় তাকে বলে **boundary**, আর খোসাসুদ্ধ পুরো set-টাকে বলে **closure**. এদের সংজ্ঞা আমরা একটু পরেই শিখব। আপাততঃ আমাদের আমের উদাহরণে এদের ছবি দেখে রাখো Fig 23 আর Fig 24-এ।

Example 13: বলো তো ($\mathbb{R}$, Euclidean)-এর মধ্যে $\mathbb{Q}$-এর interior কী হবে?

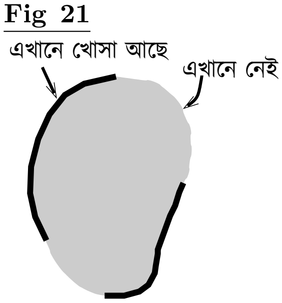
SOLUTION: যেহেতু $\mathbb{Q}^c$ হল dense in $\mathbb{R}$, তাই যাই $x \in \mathbb{Q}$ নাও না কেন, ওর এমন কোনো neighbourhood পাবে না, যার মধ্যে অন্ততঃ একটা irrational সংখ্যা নেই। অর্থাৎ x-এর কোনো neighbourhood-ই সম্পূর্ণভাবে $\mathbb{Q}$-এর মধ্যে নেই। তাই কোনো $x \in \mathbb{Q}$-ই interior point হতে পারে না। তাই $\mathbb{Q}^\circ = \phi$. ■

Exercise 9: এবার বলতে হবে ($\mathbb{R}$, Euclidean)-এর মধ্যে $\mathbb{Q}^c$-এর interior কী হবে। ■

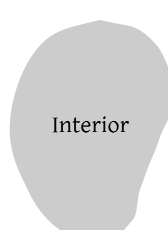
Exercise 10: যদি (X,d)-র কোনো subset দিই, A, তবে কি $(A^c)^\circ$ অবশ্যই $(A^\circ)^c$ হতে বাধ্য? ■

Example 14: Find the interior set of $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq y \leq x^2, \ 0 < x \leq 1\}$ considered as a subset of ($\mathbb{R}^2$, Euclidean).

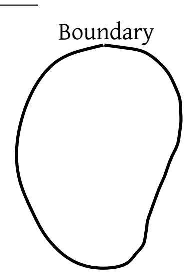
<u>Fig 21</u>



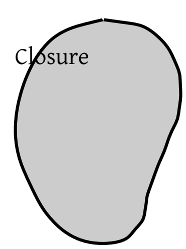
<u>Fig 22</u>



<u>Fig 23</u>



<u>Fig 24</u>



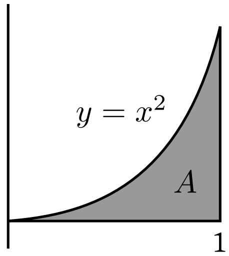


Fig 25

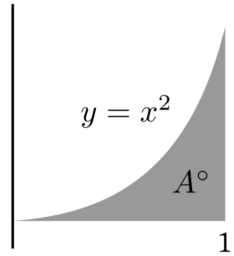


Fig 26

SOLUTION:ছবিতে A-কে দেখিয়েছি Fig 25-এ। খোসাগুলো বাদ দিলে পড়ে থাকে

$$A^\circ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 0 < y < x^2,\; 0 < x < 1\},$$

যেমন দেখিয়েছি Fig 26-এ। ■

Exercise 11: Let d_1 be the Euclidean metric and let d_2 be the discrete metric on $\mathbb{R}$. Find the interior of $[0,1) \cup \{2\}$ under both these metrics. ■

Exercise 12: মনে করো (X,d) একটা metric space, আর তার মধ্যে দুটো set হল $A \subseteq B$. এটা কি ঠিক যে $A^\circ \subseteq B^\circ$ হতে বাধ্য? ■

Open set-এর সংজ্ঞা আর interior-এর সংজ্ঞার মধ্যে সাদৃশ্য আছে। দুটো সংজ্ঞার দিকে এক ঝলক তাকালেই বুঝবে নীচের theorem-টা কেন ঠিক।

> **THEOREM**
> A set A in a metric space is open if and only if $A = A^\circ$.

প্রমাণটা দুই লাইনেই হয়ে যাবে। তোমার জন্য রেখে দিলাম।

Exercise 13: এই theorem-টা ব্যবহার করে নীচের theorem-টা ধাঁ করে প্রমাণ করে দাও দেখি! এক লাইনেই হয়ে যাবে। ■

> **THEOREM**
> For any set A in a metric space we have $(A^\circ)^\circ = A^\circ$.

আরেকটা সহজ theorem, যেটা অনেক সময়ে কাজে আসে--

> **THEOREM**
>
> Let A be any set in a metric space. Then A° is the largest open subset of A.

Proof: প্রমাণের ধারণাটা দিচ্ছি। গুছিয়ে লেখার দায়িত্ব তোমারই থাকবে। A° যে A-র subset, সে তো সংজ্ঞাতেই ধরা আছে। আর A° যে open সেটাও দেখেছি। দেখানো বাকি আছে খালি এই যে, A-র মধ্যে এমন কোনো open subset B নেই, যাতে $A^\circ \subsetneq B$ হয়।

> Let, if possible, there be open $B \subseteq A$ such that $A^\circ \subsetneq B$.
> Then we can pick $b \in B$ such that $b \notin A^\circ$.
> Since B is open, hence $\exists \epsilon > 0 \quad N(b, \epsilon) \subseteq B \subseteq A$.
> So $b \in A^\circ (\Rightarrow\Leftarrow)$.

[Q.E.D]

আরেকটা theorem দিই, এটাও প্রমাণ করা একেবারে সহজ--

> THEOREM
> Let A be a set in a metric space. Then A° is the union of all open subsets of A.

Exercise 14: এই theorem-এর প্রমাণটা গুছিয়ে লেখো। ■

Example 15: For subsets A and B of a metric space (X, d) examine the validity of

$$(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ,$$

where A° stands for the interior of set A.[3] **(2008.11c)**
SOLUTION:

> The statement is true.

দুটো set-কে সমান দেখাতে হবে। এর কায়দা তো আমরা জানিই--আলাদা করে $\subseteq$ এবং $\supseteq$ দেখানো।

> Step 1: Shall show $(A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ \cap B^\circ$, ie,
> $\forall x \in (A \cap B)^\circ \quad x \in A^\circ \cap B^\circ$.
> $\forall x$ Take any $x \in (A \cap B)^\circ$.
> Then $\exists \delta > 0 \quad N(x, \delta) \subseteq A \cap B$.

লক্ষ করো, $N(x, \delta) \subseteq A \cap B$ মানে $N(x, \delta)$-টা A এবং B দুজনের মধ্যেই আছে--

> $\because N(x, \delta) \subseteq A, \therefore x \in A^\circ$.
> Similarly,
> $\because N(x, \delta) \subseteq B, \therefore x \in B^\circ$.
> So $\therefore x \in A^\circ \cap B^\circ$, as required.

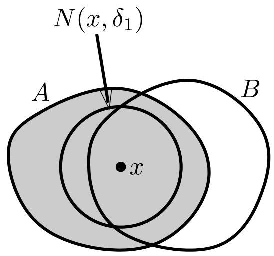


Fig 27

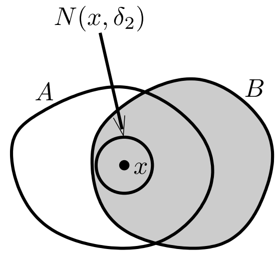


Fig 28

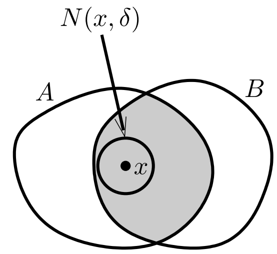


Fig 29

∎

এবার উল্টোদিকটা। Example 9-এ আমরা দেখিয়েছিলাম যে finite সংখ্যক open set-এর intersection সর্বদা open হয়। ঠিক সেই যুক্তিটাই এখানেও খাটাব--

Step 2: Shall show $A^\circ \cap B^\circ \subseteq (A\cap B)^\circ$, ie,

$\forall x \in A^\circ \cap B^\circ \quad \exists \delta > 0 \quad N(x,\delta) \subseteq A\cap B.$

$\boxed{\forall x}$ Take any $x \in A^\circ \cap B^\circ$.

$\because x \in A^\circ$,

$$\therefore \exists \delta_1 > 0 \quad N(x,\delta_1) \subseteq A.$$

$\because x \in B^\circ$,

$$\therefore \exists \delta_2 > 0 \quad N(x,\delta_2) \subseteq B.$$

এরকম δ_1 আর δ_2 দেখিয়েছি Fig 27 এবং Fig 28-এ। এদের মধ্যে যেটা বেশী ছোটো, সেটাকেই δ হিসেবে নিলে কাজ চলবে (Fig 29)।

$\boxed{\exists \delta}$ Choose $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$.

Then $N(x,\delta) \subseteq N(x,\delta_1) \subseteq A$,

and $N(x,\delta) \subseteq N(x,\delta_2) \subseteq B$.

So $N(x,\delta) \subseteq A\cap B$, as required.

■

এই অংকটা ছিল intersection নিয়ে। Union-এর ক্ষেত্রে কী হবে সেটা নিয়ে এবারের অংকটা।

Exercise 15: Let (X,d) be a metric space, and $A, B \subseteq X$. Then is the following statement always true:

$$(A\cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ?$$

HINT:

ধরো $X = \mathbb{R}$ নিলাম আর d নিলাম usual metric, মানে $d(x,y) = |x-y|$. এবার $A = (0,1)$ এবং $B = [1,2)$ নিয়ে দ্যাখো তো A°, B° এবং $(A\cup B)^\circ$ কী হয়? ■

DAY 9
Real analysis-এর উত্তরাধিকার (part 3)

9.1 Limit point

এবার আমরা শিখব limit point কাকে বলে। সংজ্ঞাটা ঠিক real analysis-এ যা ছিল সেভাবেই আসবে। ধরো (X, d) একটা metric space, আর তার মধ্যে একটা set আছে A. যদি তার প্রতিটা বিন্দুকে আমরা একটা করে লোক মনে করি, তবে দেখব কোথায় কোথায় গাদাগাদি ভীড় হয়েছে। X-এর যে সব point সেই ভীড়ের মধ্যে আছে বা একেবারে গায় লেগে আছে, তাদেরকেই বলে A-র **limit point**. এই ব্যাপারটাকে অংকের ভাষায় বেঁধে ফেলার জন্য আমরা শুরু করব deleted neighbourhood-এর সংজ্ঞা দিয়ে--

DEFINITION: Deleted ϵ-neighbourhood

Let (X, d) be a metric space. Let $a \in X$ and $\epsilon > 0$. Then the **deleted ϵ-neighbourhood** of a in X means the set

$$N'(a, \epsilon) = N(a, \epsilon) \setminus \{a\}.$$

ছবি দিয়ে ভাবলে $\mathbb{R}$-র বেলায় ব্যাপারটা Fig 30-এর মত, আর $\mathbb{R}^2$-র বেলায় Fig 31-এর মত (Euclidean metric-এর ক্ষেত্রে)।
এইবার আমার limit point-এর সংজ্ঞা দেব।

DEFINITION: Limit point

Let (X, d) be a metric space. Let $A \subseteq X$ and $\ell \in X$. We say ℓ is a **limit point** of A in X if

$$\forall \epsilon > 0 \quad N'(\ell, \epsilon) \cap A \neq \phi.$$

এক্ষুণি যে limit point-এর ধারণাটা দিলাম ("ভীড়ের মধ্যে বা গায় লেগে থাকা" point) তার সঙ্গে এই সংজ্ঞাটার মিল চোখে না পড়লে এইভাবে চিন্তা কর-- ধরো $\ell \in X$ হল এমন একটা point, যাতে A-র একদল element গিয়ে ℓ-এর একেবারে ঘাড়ের উপর গাদাগাদি ভীড় করেছে। তার মানে ℓ যদি সামান্যও নড়াচড়া করে (ধরো ϵ পরিমাণ) অমনি A-র মধ্যে অন্য কারো গায় গিয়ে পড়বে। অর্থাৎ

Fig 30

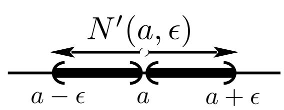
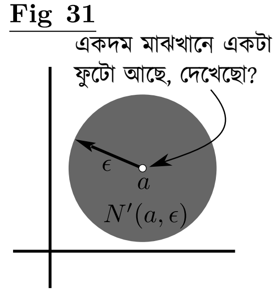


Fig 31



$\forall \epsilon > 0$ $N(\ell, \epsilon)$-এর মধ্যে এমন একটা element x পাওয়া যাবে, যাতে $x \neq \ell$ এবং $x \in A$ হয়,

মানে

$\forall \epsilon > 0$ $N'(\ell, \epsilon)$-এর মধ্যে এমন একটা element পাওয়া যাবে যেটা A-এর মধ্যেও আছে।

ঠিক সেই কথাটাই limit point-এর সংজ্ঞায় লেখা হয়েছে।
কোনো set-এর যাবতীয় limit point-এর set-কে বলা হয় মূল set-টার **derived set**.

DEFINITION: Derived set

Let (X, d) be a metric space. Let $A \subseteq X$. Its **derived set** A' in X is defined as the set of all its limit points in X.

এখানে notation-টা একটু বিচ্ছিরি। আমরা deleted neighbourhood-এর বেলায় $N'(a, \epsilon)$ লিখেছিলাম, সেটা কিন্তু মোটেই $N(a, \epsilon)$-এর derived set নয়। যদি $N(a, \epsilon)$-এর derived set বোঝাতে চাও, তবে $\big(N(a, \epsilon)\big)'$ লিখতে হবে।

Example 16: ($\mathbb{R}$, Euclidean)-এর মধ্যে $(0, 1)$ এবং $[0, 1]$-র derived set কী কী হবে? আর $\mathbb{Q}$-এর derived set? যদি $A = \mathbb{N}$ নিই, তবেই বা A' কী হবে?
SOLUTION: $(0, 1)' = [0, 1]' = [0, 1]$ হবে। যেহেতু $\mathbb{Q}$ হল $\mathbb{R}$-এর মধ্যে dense, তাই $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$. আবার $\mathbb{N}$-এর সদস্যরা সবাই ফাঁক ফাঁক করে বসানো, তাই $\mathbb{N}$-এর কোনো limit point নেই, ফলে $A' = \phi$. ■

Exercise 16: ($\mathbb{R}$, Euclidean)-এর মধ্যে $\mathbb{Q}^c$-এর derived set বার করো। আর $\left\{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$-এর derived set-টাও একটু লিখে দিও। ■

এবার একটা ঠকানো প্রশ্ন দিই।

Exercise 17: যদি (X, d)-টা একটা discrete metric space হয়, তবে তার মধ্যে X-এর derived set কী হবে?
HINT: Discrete metric space মানে হল $x \neq y$ হলে $d(x, y) = 1$. এবার চট্ করে ভেবে নাও তো $N'(x, 1)$ কী হচ্ছে! ■

Exercise 18: যদি ($\mathbb{R}$, Euclidean)-এর মধ্যে $N(0, 1) = (0 - 1, 0 + 1)$ নাও, তবে $N(0, 1)' = [-1, 1]$ হয়। যেকোনো (X, d)-র ক্ষেত্রেই কি $\big(N(a, \epsilon)\big)' = \{x \in X \ : \ d(a, x) \leq \epsilon\}$ হবে? ■

Derived set-দের একটা গুরুত্বপূর্ণ ধর্ম হল ওরা সব সময়েই closed হতে বাধ্য।

THEOREM
Let (X, d) be any metric space. Let $A \subseteq X$. Then A' must be closed in X.

Proof: আমরা দেখাব যে $(A')^c$ হল open in X.

Shall show $(A')^c$ is open in X, ie,

$\forall b \in (A')^c \quad \exists \epsilon > 0 \quad N(b, \epsilon) \subseteq (A')^c$.

If $(A')^c = \phi$, then this is vacuously true.

$\forall b$ Otherwise, take any $b \in (A')^c$.

$b \in (A')^c$ মানে b-টা A-র একটা limit point নয়, অতএব--

Since b is not a limit point of A, hence

$$\exists \epsilon > 0 \quad N'(b, \epsilon) \cap A = \phi.$$

এটা পেলাম limit point-এর সংজ্ঞার negation নিয়ে। যদি b-টা A-র limit point হত, তবে $\forall \epsilon > 0 \quad N'(b, \epsilon) \cap A \neq \phi$ হত। এর negation পেয়েছি $\forall$-টাকে $\exists$, আর '$\neq$'-টাকে '$=$' বানিয়ে।

$\exists \epsilon$ Choose this $\epsilon > 0$.

Shall show $N(b, \epsilon) \subseteq (A')^c$.

তার জন্য $N(b, \epsilon)$-র মধ্যে যা খুশি একটা element নিয়ে দেখাব যে সেটা $(A')^c$-এর মধ্যেও আছে।

Take any $x \in N(b, \epsilon)$.

দুটো কেসে ভেঙে এগোব, $x = b$ আর $x \neq b$.

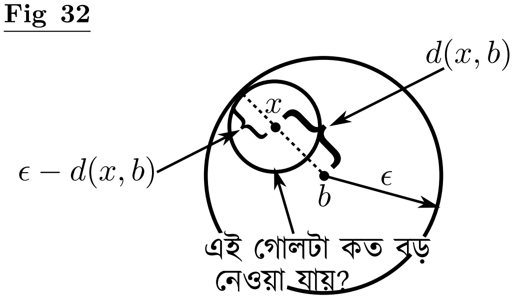
If $x = b$, then $x \in (A')^c$.

যদি $x \neq b$ হয়, তবে আমরা x-কে ঘিরে এমন একটা deleted neighbourhood বার করে দেব, যেটা A-র গায় গিয়ে পড়ে না। এর জন্য সামান্য কৌশল লাগবে। Fig 32 দ্যাখো। আমরা জানি $N'(b, \epsilon)$-টা A-র গায় গিয়ে পড়ে না। সাবধান, b নিজে কিন্তু A-র মধ্যে থাকতে পারে। তাই x-কে ঘিরে এমনভাবে একটা deleted neighbourhood বার করতে হবে যেটা $N'(b, \epsilon)$-এর মধ্যে থাকে, মানে b-র থেকে $< \epsilon$ দূরত্বের মধ্যে থাকে, অথচ b নিজে তার মধ্যে থাকে না।

If $x \neq b$, then let $\delta = \min\{d(x, b), \epsilon - d(x, b)\}$.

এইটা ভালো করে বুঝে নাও। δ-র পক্ষে $d(x, b)$-র চেয়ে বড় হওয়া সম্ভব নয়, কারণ তাহলে $N'(x, \delta)$-র মধ্যে b ঢুকে যাবে। আবার $\epsilon - d(x, b)$-র চেয়ে বড় হলে $N'(x, \delta)$-র খানিকটা অংশ $N(b, \epsilon)$-এর বাইরে চল্‌কে পড়বে।

Fig 32



> Then $N(x, \delta) \subseteq N'(b, \epsilon) \subseteq A^c$.
> So $x \in (A')^c$.
> Since $x \in N(b, \epsilon)$ was arbitrary, hence $N(b, \epsilon) \subseteq (A')^c$, as required.

[Q.E.D]

আমরা আগেই বলেছিলাম যে closed set-এর সংজ্ঞা দুই ভাবে দেওয়া যায়। এক, open set-এর complement হিসেবে। আর দুই, limit point ব্যবহার করে। প্রথমটা আমরা আগেই দেখেছি। এবার দ্বিতীয়টার পালা।

DEFINITION: Closed set (defn 2)

Let (X, d) be a metric space. Then $A \subseteq X$ is called a **closed set** in X if $A' \subseteq A$, *i.e.*, all the limit points of A in X are inside A.

Closed set-এর দুটো সংজ্ঞাই সমার্থক। সেটা আমরা একটা theorem-এর আকারে লিখে প্রমাণ করব এবার।

THEOREM

A set in a metric space is closed according to definition 1 if and only if it closed according to definition 2.

Proof:

> Defn 1 $\implies$ Defn 2: Let A be closed according to defn 1, ie, A^c is open.
> Shall show that A is closed according to defn 2, ie, $A' \subseteq A$.

আমরা contradiction-এর পথে এগোব।

> Let, if possible, $A' \not\subseteq A$. Pick some $b \in A' \setminus A$.
> Since $b \in A^c$, and A^c is open, hence $\exists \delta > 0 \quad N(b, \delta) \subseteq A^c$.
> So $N(b, \delta) \cap A = \phi$ and hence $N'(b, \delta) \cap A = \phi (\Rightarrow\Leftarrow \because b \in A')$.

শেষের ধাপটা কেন হল বুঝলে তো? $N'(b, \delta)$ তো $N(b, \delta)$-র একটা subset. তাই $N(b, \delta) \cap A = \phi$ হলে $N'(b, \delta) \cap A = \phi$ হতেও বাধ্য। এবার উল্টোদিকটা--

> Defn 2 $\implies$ Defn 1: Let A be closed according to defn 2, ie, $A' \subseteq A$.
> Shall show that A is closed according to defn 1, ie, A^c is open, ie
>
> $\forall c \in A^c \quad \exists \epsilon > 0 \quad N(c, \epsilon) \subseteq A^c$.
> If $A^c = \phi$, then done.
> $\forall c$ Otherwise, we take any $c \in A^c$.

Since $A' \subseteq A$ and $c \notin A$, hence $c \notin A'$.
Hence $\exists \epsilon > 0 \quad N'(c,\epsilon) \cap A = \phi$.

এইটা পেলাম limit point-র সংজ্ঞার negation নিয়ে। যদি বলত "$c \in A'$" তবে তার সংজ্ঞা হত

$$\forall \epsilon > 0 \quad N'(c,\epsilon) \cap A \neq \phi.$$

আমরা এর $\forall$-টাকে $\exists$ আর '$\neq$'-টাকে '$=$' বানিয়ে negation-টা পেয়েছি।

$\boxed{\exists \epsilon}$ Choose this $\epsilon > 0$.

Thus, $N'(c,\epsilon) \subseteq A^c$. Also, we have $c \in A^c$.
Hence $N(c,\epsilon) \subseteq A^c$, as required.

[Q.E.D]

এই প্রমাণটাকেই সামান্য ঘুরিয়ে চেয়েছে নীচের অংকে, closed-এর বদলে open লিখে--

Exercise 19: Let (X,d) be a metric space. A set $A \subseteq X$ is said to be open if $X - A$ is closed. Using this definition, show that the set A is open if and only if for every point $x \in A$, there exists $N(x)$ with centre x such that $N(x) \subseteq A$.[3] **(2007.11d)** ■

Example 17: Let (X,d) be a metric space and $A \subseteq X$. Then show that if $x \notin A$ and x is a limit point of A then $d(x,A) = 0$.[3] **(2011.11cii)**

SOLUTION: এখানে $d(x,A)$ বলতে বোঝাচ্ছে A থেকে x-এর দূরত্ব। সংজ্ঞাটা হল--

$$d(x,A) = \inf\{d(x,a) \ : \ a \in A\}.$$

যেমন ধরো ($\mathbb{R}$, Euclidean)-র মধ্যে $A = (0,1)$ আর $x = 1$ নিলে $d(x,A) = 0$. এই x আর A প্রশ্নের শর্ত দুটো পালন করছে, অর্থাৎ $x \in A'$ এবং $x \notin A$. এবং সত্যিই দ্যাখো $d(x,A) = 0$ হল।
তবে এখানে $x \notin A$ শর্তটার কোনো দরকার নেই, কারণ $x \in A$ হলে তো এমনিতেই $d(x,A) = 0$ হবে!

Let, if possible, $d(x,A) \equiv \inf\{d(x,a) \ : \ a \in A\} = \epsilon > 0$.

তার মানে যেকোনো $a \in A$-র জন্যই $d(x,a)$-রা $\geq \epsilon$ হবে।

$\therefore \forall a \in A \quad d(x,a) \geq \epsilon$.
Thus, $N(x,\epsilon) \cap A = \phi$.
So $N'(x,\epsilon) \cap A = \phi$.

কিন্তু x-কে বলে দিয়েছে A-র একটা limit point. সুতরাং $\forall \epsilon > 0 \quad N'(x,\epsilon) \cap A \neq \phi$ হওয়া উচিত। কিন্তু দেখাই যাচ্ছে যে এখানে সেটা হচ্ছে না!

Hence x is not a limit point of $A(\Rightarrow\Leftarrow)$.

■

Example 18: Let A be a subset of a metric space (X, d). If x is a limit point of A, show that for every neighbourhood N of x, the set $N \cap A$ is infinite.[3] **(2011.11bi)**

SOLUTION:

Let N be any neighbourhood of x in A, ie, $N \subseteq X$ is such that $x \in N^\circ$.

এখানে notation নিয়ে একটা ছোট্টো কথা বলা দরকার। কেউ কেউ আছেন যাঁরা x-এর neighbourhood বলতে বোঝেন এমন কোনো set, যার interior-এ x আছে। কেউ আবার neighbourhood বলতে একটা open set বোঝেন, যার মধ্যে x আছে। যেই অর্থেই নাও, এই অংকটা একইভাবে সমাধান হবে।
আমরা আগেই বলেছি, limit point হল সেই সব point, যারা ভীড়ের মধ্যে মধ্যে ভীড়ের গায় লেগে আছে। এই অংকটাই বস্তুতঃ এর গাণিতিক রূপ। Limit point-র সংজ্ঞা অনুযায়ী যাই $\epsilon > 0$ নাও না কেন, $N'(x, \epsilon) \cap A \neq \phi$ হবেই, অর্থাৎ $N(x, \epsilon)$-এর মধ্যে A-র অন্ততঃ একজন সদস্য থাকবে (x-কে বাদ দিয়ে)। "অন্ততঃ একজন" ব্যাপারটা শুনে ঠিক "ভীড়" বলে মনে হয় না। আসলে যেকোনো $N(x, \epsilon)$-এর মধ্যেই A-র অসংখ্য সদস্য থাকতে বাধ্য। প্রমাণটা অনেকটা ফাঁদ পাতার কায়দায় এগোবে। প্রথমে আমরা যা খুশি একটা $\epsilon_1 > 0$ নেব। মনে করো $N'(x, \epsilon_1)$ যেন আমাদের ফাঁদ। যেই এর মধ্যে A-র কোনো সদস্য a_1 পড়বে, অমনি আমরা ফাঁদটা টাইট করে আনব, $N(x, \epsilon_2)$, যেখানে $\epsilon_2 = d(x, a_1) > 0$. যেই এই নতুন ফাঁদে কোনো $a_2 \in A$ পড়বে, অমনি আবার ফাঁদটাকে আরেকটু টাইট করে বানাব $N(x, \epsilon_3)$, যেখানে $\epsilon_3 = d(x, a_2) > 0$. এইভাবে A-র অসংখ্য সদস্য আমাদের ফাঁদে ধরা পড়বে। ছবি দিয়ে ভাবলে ব্যাপারটা Fig 33-এর মত।

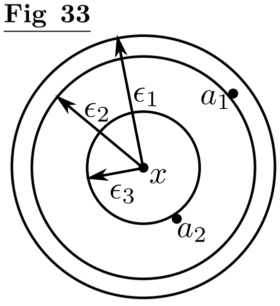
So $\exists \epsilon_1 > 0 \quad N(x, \epsilon_1) \subseteq N$.
$\because x \in A'$, $\therefore N'(x, \epsilon_1) \cap A \neq \phi$.

$$\therefore \exists a_1 \in A \quad a_1 \neq x \text{ and } d(x, a_1) < \epsilon_1.$$

Let $\epsilon_2 = d(x, a_1)$.
Then $0 < \epsilon_2 < \epsilon_1$.
Repeating the process with ϵ_2 in place of ϵ_1, we get $a_2 \in A$ such that

$$a_2 \neq x \text{ and } d(x, a_2) < \epsilon_2.$$

Fig 33



Continuing like this, we get $a_1, a_2, a_3, ... \in A$ such that

$$\epsilon_1 > d(x, a_1) > d(x, a_2) > d(x, a_3) > \cdots$$

So a_n's are all distinct, and each $a_n \in N(x, \epsilon_1) \subseteq N$.
Thus, $\{a_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ is an infinite subset of $N \cap A$.
$\therefore N \cap A$ is an infinite set, as required.

■

Example 19: Let A' denote the set of all accumulation points of A in a metric space X, for any subset A of X. Prove that for subsets A, B of X,

$$(A \cup B)' = A' \cup B'.$$

[3] **(2010.11bp1)**
SOLUTION: এখানে **accumulation point** বলে একটা নতুন ভাষা ব্যবহার করা হয়েছে। এর মানে হল limit point.
প্রমাণটা দুইভাগে ভেঙে করব, $(A \cup B)' \subseteq A' \cup B'$ এবং $A' \cup B' \subseteq (A \cup B)'$.

First part: $(A \cup B)' \subseteq A' \cup B'$:
Take any $x \in (A \cup B)'$. Shall show $x \in A' \cup B'$.

আমাদের দেখাতে হবে হয় $x \in A'$ আর নয়তো $x \in B'$. এরকম "এটা নয়তো ওটা"-জাতীয় জিনিস প্রমাণের একটা কায়দা হল "এটা নয়" ধরে নিয়ে "ওটা হতে বাধ্য" দেখানো। আমরা ধরে নেব $x \notin A'$, এবং তা থেকে দেখাব $x \in B'$ হতে বাধ্য।

Let $x \notin A'$. Shall show $x \in B'$, ie,

◎ $\forall \epsilon > 0 \quad N'(x, \epsilon) \cap B \neq \phi$.

$\boxed{\forall\epsilon}$ Take any $\epsilon > 0$.

$\because x \notin A'$,

$$\exists \epsilon_0 > 0 \quad N'(x, \epsilon_0) \cap A = \phi.$$

আমরা প্রথমে দেখাব যে এই ϵ_0-এর জন্য $N'(x, \epsilon_0) \cap B \neq \phi$. সেটা বোঝাই যাচ্ছে, কারণ $x \in (A \cup B)'$ হবার সুবাদে $N'(x, \epsilon_0)$ অবশ্যই $A \cup B$-এর গায় গিয়ে পড়ে, অথচ A-র গায় গিয়ে পড়ছে না। তার মানে $N'(x, \epsilon_0)$ অবশ্যই B-এর গায় গিয়ে পড়ছে।

$\because x \in (A \cup B)', \ \therefore N'(x, \epsilon_0) \cap (A \cup B) \neq \phi$.
But $N'(x, \epsilon_0) \cap A = \phi$. So $N'(x, \epsilon_0) \cap B \neq \phi$.

এবার দেখাতে হবে আমাদের ϵ-এর জন্যও $N'(x, \epsilon) \cap B \neq \phi$ হবে। যদি $\epsilon > \epsilon_0$ হয়, তবে তো বলাই বাহুল্য, কারণ $N'(x, \epsilon_0)$-ই যদি B-এর গায় গিয়ে পড়ে, তবে আরো বড় $N'(x, \epsilon)$-টাও B-কে ধাক্কা দিতে বাধ্য।

> So if $\epsilon > \epsilon_0$, then $N'(x,\epsilon) \cap B \neq \phi$, as required.

পড়ে রইল $\epsilon \leq \epsilon_0$ কেসটা। ঠিক যেভাবে $N'(x,\epsilon_0) \cap B \neq \phi$ দেখালাম, সেভাবে এগোলেই হবে--

> Let $\epsilon \leq \epsilon_0$.
> $\because x \in (A \cup B)'$, $\therefore N'(x,\epsilon) \cap (A \cup B) \neq \phi$.
> But $N'(x,\epsilon_0) \cap A = \phi$, and hence $N'(x,\epsilon) \cap A = \phi$.
> So $N'(x,\epsilon_0) \cap B \neq \phi$, as required.

ব্যস্, এক দিকটা দেখানো হয়ে গেল! এবার দেখাব উল্টো দিকটা, মানে $A' \cup B' \subseteq (A \cup B)'$.

> Second part: $A' \cup B' \subseteq (A \cup B)'$:
> Take any $x \in A' \cup B'$. Shall show $x \in (A \cup B)'$.
> W.l.g, let $x \in A'$.

এখানে without loss of generality (w.l.g.) বললাম কারণ $x \in A' \cup B'$ মানে--হয় $x \in A'$ আর নয়তো $x \in B'$. প্রমাণটা দুইক্ষেত্রেই একইভাবে হবে। তাই $x \in A'$ ধরে এগোনোই যথেষ্ট।

> Then $\forall \epsilon > 0 \quad N'(x,\epsilon) \cap A \neq \phi$.
> $\therefore \forall \epsilon > 0 \quad N'(x,\epsilon) \cap (A \cup B) \neq \phi$.
> Hence $x \in (A \cup B)'$, as required.

■

এবার কয়েকটা অংক দিচ্ছি, যেগুলো করলে বুঝতে পারবে derived set-এর সঙ্গে বিভিন্ন set operation-এর সম্পর্ক কীরকম।

Exercise 20: ধরো (X,d) একটা metric space আর $A, B \subseteq X$. তোমাকে বলতে হবে নীচের কোন্ কোন্ বাক্যগুলো সর্বদাই সঠিক। ভুলগুলোর জন্য একটা করে counterexample দিতে হবে।

1. $\phi' = \phi$.
2. $X' = X$.
3. $(A^c)' = (A')^c$.
4. $A \subseteq B \implies A' \subseteq B'$.
5. $(A \cup B)' = A' \cup B'$.
6. $(A \cap B)' = A' \cap B'$.
7. $(A')' \subseteq A'$.
8. $(A')' = A'$.

■

DAY 10
Real analysis-এর উত্তরাধিকার (part 4)

10.1 Closure

Closure ব্যাপারটা কী তার একটা ধারণা আমরা আগেই দিয়েছিলাম এইভাবে-- একটা set A-কে যদি একটা খানিকটা-খোসা-ছাড়ানো আম বলে ভাবি, তবে A-র closure হল পুরো খোসাসুদ্ধ আমটা, যাকে আমরা লিখি $\overline{A}$. আরও বলেছিলাম যে খোসাটুকুকে বলে A-র boundary আর খোসা বাদ দিয়ে শাঁসটুকুকে বলে A-র interior, বা A°. তাহলে closure আর boundary-র ধারণাকে অংকের ভাষায় প্রকাশ করার দুটো কায়দা হতে পারে--

- এক, প্রথমে closure-এর সংজ্ঞা দেওয়া, এবং তার পরে বলা যে

$$\text{boundary}(A) = \overline{A} \setminus A^\circ.$$

- দুই, প্রথমে boundary-র সংজ্ঞা দেওয়া, তারপর বলা যে closure হল $A \cup \text{boundary}(A)$,

এই দুটো পথেই ঠিক একই জায়গায় পৌঁছনো যায়। আমরা দুটো পথই দেখাব। প্রথম পথে closure-এর সংজ্ঞা হবে এইরকম--

DEFINITION: Closure

Let (X, d) be a metric space. Let $A \subseteq X$. Then **closure** of A in X is defined as the set

$$\overline{A} = A \cup A'.$$

সংজ্ঞাটা বলছে যে $\overline{A}$ তৈরী দুই ধরণের point নিয়ে--এক, যারা A-র মধ্যে আছে, আর দুই, যারা A-র একেবারে গায় লেগে আছে। ঠিক একই সংজ্ঞা ছিল real analysis-এর ক্ষেত্রেও।

Example 20: ($\mathbb{R}$, Euclidean)-এর মধ্যে নীচের set-গুলোর closure বার করো।

1. $(0, 1)$
2. $\mathbb{Q}$
3. $\mathbb{N}$.

SOLUTION:

1. $(0, 1)$-এর closure হল $[0, 1]$.
2. $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, কারণ $\mathbb{Q}$ হল $\mathbb{R}$-এর মধ্যে dense.
3. $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$.

■

Exercise 21: ($\mathbb{R}$, Euclidean)-এর মধ্যে নীচের set-গুলোর closure বার করো।
(*i*) $[0,1)\cup\{2\}$ (*ii*) $\mathbb{Q}^c$ (*iii*) $\mathbb{Z}$. ■

Exercise 22: দ্যাখাও যে, discrete metric space-এ যেকোনো set হল তার নিজের closure. ■

Closure শব্দটার সাথে closed শব্দটার বেশ মিল আছে, না? ওদের মধ্যে অংকের দিক দিয়েও ওতপ্রোত সম্পর্ক। তার প্রথম নমুনা নীচের theorem-টাই।

THEOREM
The closure of a set must be closed.

Proof: সরাসরি সংজ্ঞা থেকে প্রমাণ করতে গেলে খানিকটা খাটতে হবে। কিন্তু যদি একটু বুদ্ধি করে এগোও, তবে প্রমাণটা আশ্চর্য রকমের সহজ।

> Let (X,d) be a metric space and let $A\subseteq X$.

আমরা দেখাব $\overline{A}$ হল closed. তার জন্য দেখাব যে ওর সব limit point-ই ওর মধ্যেই আছে, মানে--

> Enough to show that $(\overline{A})'\subseteq A$.
>
> Now $(\overline{A})'=(A\cup A')'=A'\cup(A')'\subseteq A'\cup A'=A'$, as required.

এখানে আমরা derived set-দের সঙ্গে set operation-দের দুটো সম্পর্ক ব্যবহার করেছি (এরকম একঝাঁক সম্পর্ক Exercise 20-এ দেওয়া ছিল)--এক, $(A\cup B)'=A'\cup B'$ আর দুই, $(A')'\subseteq A'$. **[Q.E.D]**

আমরা আগে দেখেছিলাম যে, একটা set যদি open হয়, তবে সে তার নিজের interior set হয়। আবার বিপরীতপক্ষে, যদি কোনো set তার নিজের interior-এর সমান হয়, তবে set-টা অবশ্যই open হতে বাধ্য। নীচের theorem-টাও একইরকম, খালি open-এর জায়গায় closed, আর interior-এর জায়গায় closure.

THEOREM
A subset A of a metric space is closed if and only if $A=\overline{A}$.

Exercise 23: এই theorem-টাকে প্রমাণ করো। ভয় নেই, এক লাইনেই প্রমাণ হয়ে যাবে। ■

Exercise 24: এই theorem-টা ব্যবহার করে আরেক লাইন খরচা করলেই নীচের theorem-টাও প্রমাণ করতে পারবে। চেষ্টা করে দ্যাখো! ■

> THEOREM
> For any set A in a metric space we have $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$.

Closure-এর সংজ্ঞা আরেকভাবেও দেওয়া যায়, এবং যতই অংক শিখবে, দেখবে সেই সংজ্ঞাটাই লোকে বেশীরভাগ সময়ে ব্যবহার করছে--

$\overline{A}$ is the smallest closed set containing A.

এটা নিয়েই নীচের অংকটা।

Exercise 25: Let A be a subset of of a metric space. Then show that $\overline{A}$ is the smallest closed set containing A.

HINT:
আমরা আগেই জানি যে, $\overline{A}$ হল এমন একটা set যেটা closed, এবং A যার একটা subset. এই অংকে বাড়তি কী দেখাতে হবে সেটা বুঝে নিই। $\overline{A}$ তো A-র superset আছেই। দেখাতে বলেছে এ দুয়ের মাঝখানে আর কোনো closed set B থাকতে পারে না। ধরো পারে। তার মানে ধরে নিচ্ছি যে, এমন B আছে যাতে

- B হল closed,
- এবং $A \subseteq B \subsetneq \overline{A}$.

এখান থেকে একটা contradiction-এ পৌঁছব। যেহেতু $B \subsetneq \overline{A}$, তার মানে কোনো একটা $x \in \overline{A} \setminus B$ পাওয়া যাবে। তার মানে $x \in \overline{A}$ কিন্তু $x \not\in B$. বুঝতেই পারছ যে $x \not\in A$, কারণ $A \subseteq B$. এদিকে $x \in \overline{A} = A \cup A'$. সুতরাং $x \in A'$. তার মানে x হল A-এর একটা limit point. কিন্তু $A \subseteq B$, তাই x অবশ্যই B-এরও limit point. (কারণ, x-এর গায় A-র যেসব element এসে ভীড় করছে, তারা তো B-এরও element!). কিন্তু B যেহেতু closed, তাই ওর limit point হবার সুবাদে x-কেও B-এর মধ্যে থাকতে হবে। এদিকে আমরা তো $x \not\in B$ নিয়ে শুরু করেছিলাম। ব্যস্, contradiction! এবার ধাপগুলোকে সুন্দর করে অংকের ভাষায় গুছিয়ে লিখে ফ্যালো দেখি! ■

লক্ষ কর যে তিনটে ধাপ মিলিয়ে আমরা এই theorem-টা প্রমাণ করে ফেললাম--

> THEOREM
> $\overline{A}$ is the smallest closed set containing A.

Closure-এর সংজ্ঞা আরেকভাবেও দেওয়া যায়। সেটা নীচের অংকে উল্লেখ করলাম। উপরের অংকগুলো বুঝে থাকলে এটা করা খুবই সহজ হওয়া উচিত, তাই আর করে দিলাম না।

Exercise 26: Let A be a subset of a metric space. Let $\{B_\alpha : \alpha \in I\}$ be the collection of all closed sets containing A. Then show that $\overline{A} = \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha$.

HINT:
এখানে আমরা যাবতীয় closed set নিচ্ছি, যারা A-র superset. যেমন, যদি $\mathbb{R}$-এর মধ্যে $A = (0,1)$ নিতাম, তবে এরকম বহু closed set পেতাম, যারা $(0,1)$-এর চেয়ে বড়, যেমন $[-1,1]$ বা $[-100,100]$ ইত্যাদি। এরকম সব set-এর intersection নিলেই তুমি $\overline{A}$ পাবে। এটাই দেখাতে বলেছে। আগের অংকগুলো ব্যবহার করলে এই অংকটা কিন্তু অতি সংক্ষেপেই কষে ফেলা যায়। চিন্তা করে দ্যাখো! ■

এবার আমরা একটা জিনিস শিখব, যেটা মাঝে মাঝে কাজে লাগে। ধরো Fig 34-এর মত দুটো set দিলাম ($\mathbb{R}^2$, Euclidean)-এর মধ্যে। এদের মধ্যে intersection-টা কি nonempty? না, ছুরিটা খালি ছুঁয়ে আছে আমটাকে। যেখানে

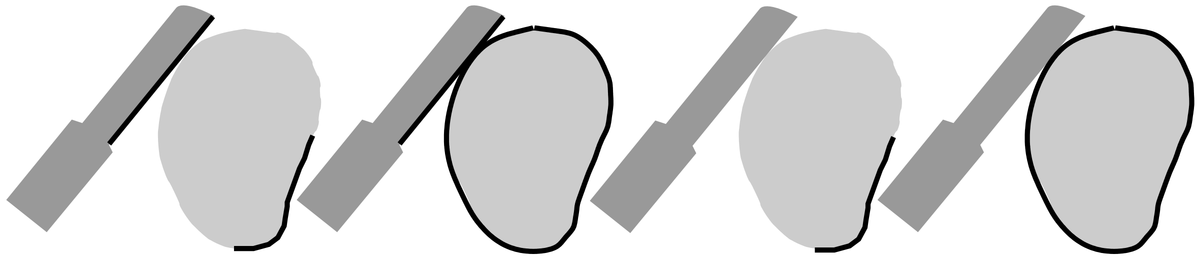


Fig 34 **Fig 35** **Fig 36** **Fig 37**

এক পলকের একটু দেখা আরো একটু বেশী হলে ক্ষতি কী?
--প্রচলিত বাংলা গান

ছুঁয়ে আছে, সেখানে কোনো খোসা না থাকায় intersection হয় নি। কিন্তু যদি Fig 35-এর মত আমটার সর্বত্র খোসা লাগিয়ে নিতাম (মানে closure নিতাম), তবে কিন্তু সামান্য হলেও intersection হয়ে যেত। এটাকে বলা যেতে পারে আলতো intersection, খালি closure-টাকেই intersect করেছে, মূল set-টাকে নয়। এক পলকের একটু দেখাতেই সীমাবদ্ধ, আরো একটু বেশী কিছু হয়ে ওঠার সুযোগ পায়নি। তবে যদি set দুটোর মধ্যে একজনও open set হয়, তবে এরকম আলতো intersection কখনোই সম্ভব হত না, যেমন Fig 36-এ ছুরিটাকে open নিয়েছি। এখানেও আমের সঙ্গে কোনো intersection নেই। কিন্তু যদি Fig 37-এর মত closure-ও নিই, তাও কোনো intersection হবে না। মানুষের মধ্যেও দেখবে একরকম মানুষ আছে, যারা কখনো অগভীর আলতো সম্পর্কে আগ্রহী হয় না, সম্পর্ক যদি হতেই হয়, তবে সেটা আন্তরিক হতেই হবে। Open set-গুলোও যেন সেরকম। ওদের এই স্বভাবেরই গাণিতিক রূপ হল নীচের অংকটা।

Example 21: If U, V are subsets of a metric space (X, d) with U an open set, show that $U \cap V = \phi \implies U \cap \overline{V} = \phi$, where $\overline{V}$ denotes the closure of V in (X, d).[2] **(2013.5bii)**

SOLUTION: যদি একই সঙ্গে $U \cap V = \phi$ আর $U \cap \overline{V} \neq \phi$ হত, তবে সেটা হত অগভীর আলতো intersection. কিন্তু U যদি open হয়, তবে এমনটা হতে পারে না। এটাই এই অংকটার বক্তব্য।

> Given: U is open and $U \cap V = \phi$.
> Shall show $U \cap \overline{V} = \phi$.
> Let, if possible, $U \cap \overline{V} \neq \phi$.
> Then pick $x \in U \cap \overline{V}$.
> $\because x \in U$ and U is open,
> $\therefore \exists \epsilon > 0 \quad N(x, \epsilon) \subseteq U$.

আমরা আরো জানি $x \in \overline{V}$. তার মানে হয় $x \in V$ আর নয়তো $x \in V'$. আমরা দেখাব যে x-টা V-তে থাকতে পারে না, তাই V'-এ থাকতে বাধ্য।

> Again, $\because x \in U$ and $U \cap V = \phi$,
> $\therefore x \notin V$.
> $\therefore x \in V'$.

তার মানে x-কে ঘিরে যেকোনো deleted neighbourhood-ই V-এর গায় গিয়ে পড়বে--

$\therefore N'(x,\epsilon) \cap V \neq \phi$.
But $N'(x,\epsilon) \subseteq N(x,\epsilon) \subseteq U$.
So $U \cap V \neq \phi (\Rightarrow\Leftarrow)$.

■

10.2 Boundary

একটা খোসাসুদ্ধ আম থেকে ভিতরের শাঁসটা বাদ দিলে কী পড়ে থাকে? উত্তর হল--খোসাটুকু। সুতরাং নীচের অংকটা করতে কোনোই অসুবিধা নেই--

Example 22: Define boundary of a set in a metric space (X, d).[1] **(2011)**

SOLUTION:

> **DEFINITION: Boundary**
>
> Let A be a subset of a metric space (X, d). Then the <u>boundary</u> of A is defined as
>
> $$\text{boundary}(A) = \overline{A} \setminus A^\circ.$$

অনেক সময়ে লোকে boundary(A)-কে ∂A-ও লিখে থাকে। ■

Example 23: Find the boundaries of the following sets in $\mathbb{R}$ with the usual metric.

1. $\{\frac{1}{n} \;:\; n \in \mathbb{N}\}$,
2. $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}$ being the set of rationals.

[2+2] **(2011)**

SOLUTION:

1) Let $A = \left\{\frac{1}{n} \;:\; n \in \mathbb{N}\right\}$.
Then $A' = \{0\}$.
So $\overline{A} = A \cup A' = A \cup \{0\}$.
Also $A^\circ = \phi$.

কারণ A-র point-গুলো সবাই ফাঁক ফাঁক হয়ে আছে। অংকের ভাষায়--

⟦ Because:

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \epsilon > 0 \quad N\left(\frac{1}{n}, \epsilon\right) \not\subseteq A.$

⟧

$\therefore$ boundary$(A) = \overline{A} \setminus A^\circ = \{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}.$

2) Let $B = [0,1] \cap \mathbb{Q}$.

$\because \mathbb{Q}$ is dense in $\mathbb{R}$,

$\therefore B$ is dense in $[0,1]$.

$\therefore \overline{B} = [0,1]$.

Also, $B^\circ = \phi$.

⟦ Because:

$\because \mathbb{Q}^c$ is dense in $\mathbb{R}$, $\therefore \forall x \in B \quad \forall \epsilon > 0 \quad N(x, \epsilon) \not\subseteq B$.

⟧

$\therefore$ boundary$(B) = \overline{B} \setminus B^\circ = [0,1]$.

■

Example 24: Show that E is open if and only if boundary$(E) \cap E = \phi$.[2] **(2009.11cp2)**

SOLUTION:

Only if part: Let E be open.

Then $E^\circ = E$.

So boundary$(E) = \overline{E} \setminus E^\circ = \overline{E} \setminus E = \overline{E} \cap E^c$.

So boundary$(E) \cap E = (\overline{E} \cap E^c) \cap E \subseteq E^c \cap E = \phi$, as required.

এবার উল্টো দিকটা--

If part: Let boundary$(E) \cap E = \phi$.

Then $(\overline{E} \setminus E^\circ) \cap E = \phi$.

Thus, $\overline{E} \cap (E^\circ)^c \cap E = \phi$.

Now $E \subseteq \overline{E}$.

So $E \cap (E^\circ)^c = \phi$, ie, $E \setminus E^\circ = \phi$.

Since $E^\circ \subseteq E$, this means $E = E^\circ$.

$\therefore E$ is open, as required.

■

একটা ছোট্টো ঠকানো প্রশ্ন দিই।

Exercise 27: যদি $A \subseteq B$ হয়, তবে কি boundary$(A) \subseteq$ boundary(B) হতে বাধ্য? নাকি boundary$(B) \subseteq$ boundary(A) হতে বাধ্য? নাকি কোনোটাই নয়? ■

আরেকটা ধাঁধানো প্রশ্ন--

Exercise 28: $(\mathbb{R}$, Euclidean)-এর মধ্যে দুটো set দাও A আর B, যাতে $A \neq B$ এবং $A \neq B^c$ কিন্তু boundary$(A) =$ boundary(B) হয়। ■

Example 25: Show that for any subset A of a metric space X we have

$$\text{boundary}(\overline{A}) \subseteq \text{boundary}(A),$$

where $\overline{A}$ denotes the closure of A.

SOLUTION:

> We know that $\text{boundary}(\overline{A}) = \overline{(\overline{A})} \setminus (\overline{A})^\circ = \overline{A} \setminus (\overline{A})^\circ$
> and
> $\text{boundary}(A) = \overline{A} \setminus A^\circ$.

দুটোই বেশ একই রকম দেখতে, $\overline{A}$ থেকে কিছু বাদ দেওয়া। অতএব--

> Enough to show that $A^\circ \subseteq (\overline{A})^\circ$.
> Now $A \subseteq \overline{A}$.
> We know that if $M \subseteq N$ then $M^\circ \subseteq N^\circ$.
> Hence $A^\circ \subseteq (\overline{A})^\circ$, completing the proof.

■

Example 26: Let $bdy(A)$ and $\overline{A}$, respectively, denote the set of all boundary points of A, and the closure of A in a metric space X, for any subset A of X. Prove that for any subset A of X,

$$bdy(\overline{A}) = bdy(A).$$

[2] **(2010.11bp2)**

SOLUTION: অংকটা ভুল। একটা counterexample দিয়ে দিই--

> The result is not correct.
> Counterexample: Let $X = \mathbb{R}$ with usual metric.
> Let $A = (0,1) \cup (1,2)$.
> Then $\overline{A} = [0,2]$.
> Also $A^\circ = (0,1) \cup (1,2)$ and $(\overline{A})^\circ = (0,2)$.
> Thus, $bdry(A) = \{0,1,2\}$ and $bdry(\overline{A}) = \{0,2\}$.

> So $bdry(A) \neq bdry(\overline{A})$.

■

এবারে যে অংকটা কষতে চলেছি, তার প্রস্তুতি হিসেবে একটা ছোট্টো অংক দিই। সংজ্ঞা ব্যবহার করে এক লাইনেই হয়ে যাবে।

Exercise 29: ধরো A কোনো metric space-এর subset আর z হল সেই metric space-এর একটা বিন্দু। তবে দেখাও যে নীচের দুটো বাক্য সমার্থক--

1. $z \in \overline{A}$.
2. $\forall \epsilon > 0 \quad N(z, \epsilon) \cap A \neq \phi$.

■

Example 27: Let (X, d) be a metric space and $E \subseteq X$. Let E° denote the interior of E, $\bar{E}$ denote the closure of E and let

$$\text{boundary}(E) = \bar{E} - E^\circ.$$

Prove that E°, boundary(E) and $(X - E)^\circ$ form a partition of X.[3] **(2009.11c)**
SOLUTION: এখানে তিনটে set দিয়ে দেখাতে বলেছে যে ওরা মিলে X-এর একটা **partition** হবে। এর মানে হল ওই তিনটে set-এর union হবে X, আর ওদের মধ্যে কোনো intersection থাকবে না। একটা উদাহরণ নিয়ে দেখা যাক। ধরো X হল $\mathbb{R}^2$, আর E হল সেই খানিকটা খোসা-ছাড়ানো আম (Fig 38)। তবে Fig 39-এ লক্ষ করো পুরো $\mathbb{R}^2$-র যেকোনো বিন্দুই হয় আমের শাঁসের মধ্যে আছে (E°), বা খোসার গায় আছে ($bdy(E)$), বা একেবারে বাইরে আছে ($(X \setminus E)^\circ$)।
প্রমাণের শুরুতেই set তিনটের ভদ্র নাম দিয়ে নেওয়া যাক--

> Let $A = E^\circ,\ B = \text{boundary}(E)$ and $C = (X \setminus E)^\circ$.

তার পর partition হবার শর্তটা লিখে নিই, তিনজনে মিলে X-কে পুরো ঢাকবে কিন্তু নিজেদের মধ্যে কোনো intersection থাকবে না।

> To show
>
> 1. $X = A \cup B \cup C$,
> 2. $A \cap B = \phi$,
> 3. $B \cap C = \phi$,

Fig 38

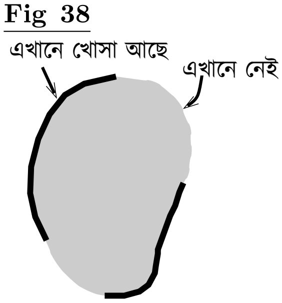
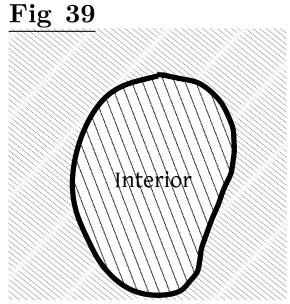


Fig 39



> 4. $C \cap A = \phi$.

এবার দেখানো শুরু করি--

> Now $A \subseteq E$ and $C \subseteq X \setminus E$. So $C \cap A = \phi$.
> By definition, $x \in B$ means $x \in \overline{E}$ but $x \notin A$. So $A \cap B = \phi$.
> If $y \in C$, then $\exists \epsilon > 0 \quad N(y, \epsilon) \subseteq X \setminus E$.
> So $N(y, \epsilon) \cap E = \phi$. So $x \notin \overline{E}$.
> Hence $x \notin B$.
> So $B \cap C = \phi$.

তার মানে দেখানো শেষ হল যে A, B, C-র মধ্যে কোনো intersection নেই। এবার দেখাব $X = A \cup B \cup C$. যেহেতু $A, B, C \subseteq X$, সুতরাং $A \cup B \cup C \subseteq X$ হয়েই আছে। আমাদের কাজ হল খালি $X \subseteq A \cup B \cup C$ দেখানো। তার জন্য যা খুশি $z \in X$ নিয়ে দেখাব $z \in A \cup B \cup C$ হবে।

> Take any $z \in X$.

লক্ষ করো $z \in A \cup B \cup C$ দেখানো মানে $z \in A$ নয়তো $z \in B$ নয়তো $z \in C$ দেখানো। এরকম জিনিস প্রমাণ করার একটা কায়দা হল এদের মধ্যে দুটো নয় ধরে নিয়ে তিন নম্বরটা দেখানো। যেকোনো দুটো নয় ধরে শুরু করা যায়। আমরা $z \notin A$ আর $z \notin C$ ধরে শুরু করি--

> Let $z \notin A$ and $z \notin C$.
> Shall show that $z \in B$.
> $\because z \notin C$,
> $$\therefore \forall \epsilon > 0 \quad N(z, \epsilon) \cap E \neq \phi.$$

কারণ C হল $(E^c)^\circ$, তাই $z \notin C$ মানে, z-টা E^c-এর interior-এ নেই। অতএব যাই neighbourhood নাও z-কে ঘিরে, সেটা E^c-এর বাইরে বেরিয়ে আসবে।

> $\therefore z \in \overline{E}$.

এই যুক্তিটা বুঝতে পারলে? এটাই ছিল আগের অংকটা, মানে Exercise 29.

> But $z \notin A$.
> So $z \in (\overline{E}) \setminus A = B$, as required.

■

10.3 বিকল্প সংজ্ঞা

Boundary ব্যাপারটা ছবি দিয়ে বুঝতে বেশ সহজ। অথচ যেভাবে সংজ্ঞাটা লিখেছিলাম সেটা কিন্তু বেশ জটিল, অনেক উপকরণ লেগেছিল--প্রথমে interior, তারপর limit point, সেখান থেকে derived set, তা থেকে closure, এবং তবে closure থেকে interior বাদ দিয়ে boundary পাওয়া গিয়েছিল। আমরা কিন্তু কাজটা অনেক সহজে এইভাবেও করতে পারতাম--প্রথমে সরাসরি boundary-র সংজ্ঞা দিতে পারতাম। boundary হল সীমানা, একটা point যদি boundary-তে

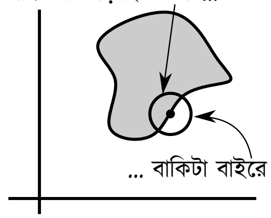


Fig 40

থাকে, তার মানে সামান্য একটু সরলেই point-টা set-এর বাইরে চলে যেতে পারে, আবার সামান্য সরলেই set-এর মধ্যেও ঢুকে যেতে পারে। অর্থাৎ b যদি A-র একটা boundary point হয়, তবে b-কে কেন্দ্র করে যাই neighbourhood নিই না কেন, তার খানিকটা A-র মধ্যে পড়বে, আর খানিকটা বাইরে। Fig 40 দ্যাখো। সুতরাং আমরা boundary-র এই সংজ্ঞাটাও দিতে পারি--

DEFINITION: **Boundary** (বিকল্প সংজ্ঞা)

Let A be the subset of a metric space (X, d). Then the **boundary** of A in X is defined as the set of all points $b \in X$ such that

$$\forall \epsilon > 0 \quad N(b, \epsilon) \cap A \neq \phi \text{ and } N(b, \epsilon) \cap A^c \neq \phi.$$

এ থেকে আমরা closure-এর একটা নতুন সংজ্ঞা পেতে পারি--খোসা-সুদ্ধ set-টা হল set এবং তার খোসার union:

DEFINITION: **Closure** (বিকল্প সংজ্ঞা)

Let A be a subset of a metric space (X, d). Then the **closure** of A in X is defined as

$$\overline{A} = A \cup \text{boundary}(A).$$

নীচের অংকটা মোটেই কঠিন নয়, যদিও চিন্তা করতে একটু সময় লাগতে পারে--

Exercise 30: দ্যাখাও যে এই নতুন সংজ্ঞাদুটো আর আমাদের মূল সংজ্ঞাদুটো আসলে সমার্থক। ■

DAY 11
Subspace, discrete metric এবং equivalent metric

11.1 Subspace

অংকের জগতে বহু জিনিসের একটা করে sub-সংস্করণ হয়, যেমন set-এর বেলায় subset হয়, group-এর বেলায় subgroup হয়, ring-এর বেলায় subring, ইত্যাদি। Metric space-এর বেলাতেও তার অন্যথা নেই। ধরো (X, d) একটা

যেকোনো metric space. এর একটা subspace মানে হল X-এর যেকোনো একটা nonempty subset $Y \subseteq X$, যার উপর আমরা metric হিসেবে ওই একই d ব্যবহার করব। ব্যস্! শুরুতে d ছিল $X \times X \to \mathbb{R}$, এখন সেটাকে ব্যবহার করছি $Y \times Y \to \mathbb{R}$ হিসেবে। যেহেতু domain-টাকে $X \times X$ থেকে কমিয়ে $Y \times Y$ করে দিয়েছি, তাই অনেকে d না লিখে d_Y লেখে, আর বলে যে এটা হল Yএর উপরে d-এর **relative metric**. যদিও Y-তে এবং X-এ দূরত্ব মাপার জন্য আমরা একই metric ব্যবহার করছি, তাও (Y, d_Y)-এর কিছু কিছু আচরণ (X, d)-র থেকে বেশ আলাদা হতে পারে।

Example 28: যেমন $(\mathbb{R}, d)$-র কথাই ধরো, যেখানে $d(x, y) = |x - y|$. যদি $\mathbb{R}$-এর মধ্যে $N\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ বার করতে চাও, তবে হবে

$$N\left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}\right) = \left\{x \in \mathbb{R} \;:\; \left|x - \tfrac{1}{3}\right| < \tfrac{1}{2}\right\} = \left(-\tfrac{1}{6}, \tfrac{5}{6}\right).$$

লক্ষ কর $\frac{1}{3}$ আছে ঠিক এর কেন্দ্রে। কিন্তু যদি $Y = [0, 1]$-এর মধ্যে $N_Y\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ বার করতে চাই, তবে পাব--

$$N_Y\left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}\right) = \left\{x \in [0, 1] \;:\; \left|x - \tfrac{1}{3}\right| < \tfrac{1}{2}\right\} = \left[0, \tfrac{5}{6}\right).$$

এটা হল Y-এর মধ্যে একটা open ball, যার centre হল $\frac{1}{3}$. যদিও আমরা open বলতে যা ভাবি, এটা মোটেই সেরকম দেখাচ্ছে না, কারণ বাঁদিকে '[' রয়েছে। আর $\frac{1}{3}$-ও এর ঠিক "কেন্দ্রে" নেই। এর জন্য দোষ অবশ্য Y-এর। আমরা $\frac{1}{3}$ থেকে দুই দিকেই $< \frac{1}{2}$ দূরত্ব অব্ধি যেতে চেয়েছিলাম, কিন্তু যে point-গুলো Y-এর বাইরে পড়ে গেছে, তাদের তো আর হিসেবে নিতে পারি না। তার মানে $N_Y\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ হল সেই সব point নিয়ে তৈরী, যারা $N\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$-এও আছে, আবার Y-তেও আছে, মানে

$$N_Y\left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}\right) = N\left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}\right) \cap Y.$$

■

একই যুক্তিতে যেকোনো $a \in Y$ এবং $r > 0$-এর জন্যই

$$N_Y(a, r) = N(a, r) \cap Y.$$

Exercise 31: প্রতি ক্ষেত্রে ($\mathbb{R}$, Euclidean)-এর একটা করে subspace Y দেওয়া আছে, এবং একটা করে $a \in Y$ এবং $r > 0$-ও দেওয়া রয়েছে। তোমাকে $N_Y(a, r)$ বার করতে হবে।

1. $Y = \mathbb{N}, a = 2, r = 5$.
2. $Y = (0, 1), a = 0.1, r = 0.2$.
3. $Y = [-10, 2) \cup \{3, 5\}, a = 1, r = 4$.

■

Exercise 32: Consider $(\mathbb{R}^2, d)$ where d is the usual metric. Let $Y = [0, 1] \times [0, 1]$. Sketch the open ball $N_Y\left((0, 1), \frac{1}{2}\right)$.

HINT:

এই অংকটা তুমিই করবে, খালি চট্ করে মনে করিয়ে দিই যে $Y = [0, 1] \times [0, 1]$ হল Fig 41-এর মত দেখতে। এর মধ্যে $(0, 1)$ বিন্দুটা কোথায় রয়েছে সেটাও দেখিয়ে দিয়েছি। ■

একই রকম ব্যাপার হবে open বা closed set-এর বেলাতেও। একটা subspace-এর মধ্যে এমন অনেক open বা closed set দেখবে, যেগুলোকে চোখে দেখে open বা closed বলে বিশ্বাস করা শক্ত। একটা subspace-এর মধ্যে একটা set A দেওয়া থাকলে সেটা open কিংবা closed কিনা বার করার একটা সহজ কায়দা আছে, এইরকম--

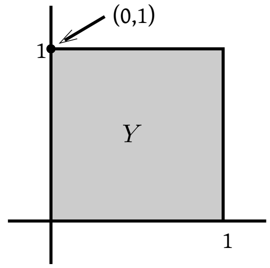


Fig 41

> THEOREM
>
> Let (X, d) be a metric space. Let $\phi \neq Y \subseteq X$. Then a set $A \subseteq Y$ is open in Y if and only if it can be written as
> $$A = B \cap Y$$
> for some open B in X. Similarly, $C \subseteq Y$ is closed in Y if and only if it can be written as
> $$C = D \cap Y$$
> for some closed D in X.

এই theorem-টা প্রমাণ করা খুবই সহজ (চেষ্টা করেই দ্যাখো!), যদিও আমরা তার মধ্যে যাচ্ছি না। বরং কিছু প্রয়োগ দেখি।

Example 29: ($\mathbb{R}$, Euclidean)-এর একটা subspace নিই $Y = \{1, 2, 3\}$. বল তো $\{3\}$ কি Y-এর মধ্যে open?

SOLUTION: হ্যাঁ, কারণ আমরা $\{3\}$-কে এইভাবে লিখতে পারি--

$$\{3\} = (2.9, 3.1) \cap Y.$$

যেহেতু $(2.9, 3.1)$ হল $\mathbb{R}$-এর মধ্যে open, তাই $\{3\}$-ও হবে Y-এর মধ্যে open. এখানে $(2.9, 3.1)$ না নিয়ে অন্য কিছুও নিতে পারতাম, যেমন $(2.5, 3.2)$. ■

এই অংকটা দেখেই বুঝতে পারছ, কোনো metric space-এর মধ্যে open set-দের চেহারা জানা থাকলেই তার যেকোনো subspace-এর মধ্যেকার open set-দের চেহারাও বার করে দেওয়া যায়। একই কায়দায় নীচের অংকগুলো কর।

Exercise 33: প্রতি ক্ষেত্রে ($\mathbb{R}$, Euclidean)-এর একটা subspace Y এবং Y-এর একটা subset A দেওয়া আছে। বলতে হবে কখন A-টা Y-এর মধ্যে open বা closed বা দুটোই বা কোনোটাই নয়।
(*i*) $Y = (0, 2], A = (0, 1]$. (*ii*) $Y = (0, 2], A = (0, 1)$. (*iii*) $Y = (0, 2], A = [1, 2)$. (*iv*) $Y = (0, 2] \cup [10, 13], A = (0, 2]$. (*v*) $Y = (0, 2] \cup [10, 13], A = (11, 12]$. (*vi*) $Y = \mathbb{N}, A = \{2, 3\}$.
■

Example 30: Let $Y = [0, 1) \cup (1, 2] \cup \{5, 6\}$. Give an example of a subset of Y which is closed in the subspace (Y, d_Y), but not closed in $(\mathbb{R}, d)$ where $d(x, y) = |x - y|$ for all $x, y \in \mathbb{R}$. Also find the boundary of Y in $(\mathbb{R}, d)$.[3+2] **(2013.5c)**
SOLUTION:

We choose the subset $A = [0, 1) \subseteq Y$.

Then A is closed in Y.

⟦ Because:

We know that a set is closed in Y if it can be expressed as $B \cap Y$ for some B, closed in $\mathbb{R}$. Taking $B = [0, 1]$ (closed in $\mathbb{R}$) we see that $B \cap Y = [0, 1) = A$. Hence A is closed in Y.

⟧

A is not closed in $\mathbb{R}$, because $1 \in \mathbb{R}$ is a limit point of A, but $1 \notin A$.

এবার দ্বিতীয় অংশ। এখানে অবশ্য আর subspace নিয়ে কাজ করতে হবে না। আবার আমরা $(\mathbb{R}, d)$ নিয়ে কাজ করব। সুতরাং আমাদের সহজ বুদ্ধি আবার কাজ করবে। ছবিতে Y দেখতে Fig 42-এর মত। যদি তুমি $\mathbb{R}$ বরাবর হেঁটে যাও, কোথায় কোথায় Y-তে ঢুকবে বা বেরোবে? উত্তর হল, $0, 1, 2, 5$ আর 6. তার মানে এরাই হল boundary point-গুলো। দেখা যাক, অংক কষেও একই উত্তর বেরোয় কিনা।

The derived set of Y in $(\mathbb{R}, d)$ is

$$Y' = [0, 2].$$

$\therefore$ The closure of Y in $(\mathbb{R}, d)$ is

$$\overline{Y} = Y \cup Y' = [0, 2] \cup \{5, 6\}.$$

The interior of Y in $(\mathbb{R}, d)$ is

$$Y^\circ = (0, 1) \cup (1, 2).$$

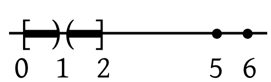
Hence, the boundary of Y in $(\mathbb{R}, d)$ is

$$\overline{Y} \setminus Y^\circ = \{0, 1, 2, 5, 6\}.$$

■

আমরা এক্ষুণি দেখলাম যে subspace-এর মধ্যে open বা closed set বলতে যা বোঝায়, সেটার সঙ্গে আমাদের সহজ বুদ্ধি অনেক সময়ে মেলে না। কিন্তু আগের theorem-টার দৌলতে একটা subspace-এর open বা closed subset-দের

Fig 42



সনাক্ত করা কঠিন নয়। কিন্তু আরও মজা হয় যখন আমরা interior point, closure বা boundary point নিয়ে কাজ করতে যাই। তখন অনেক সময়ে এমন সব অদ্ভুত কাণ্ড হয় যে থতমত খেয়ে যেতে হয়। একটা উদাহরণ দেখি--

Example 31: $(\mathbb{R}, d)$ নিয়ে শুরু করি। এর একটা subspace নিলাম $Y = [0, 1]$. এই Y-এর একটা subset হল $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. বল তো 0 কি Y-এর মধ্যে A-র একটা interior point?

SOLUTION: উত্তর হল--হ্যাঁ। এটা শুনে অদ্ভুত লাগতে পারে, কারণ interior point শুনেই কেমন মনে হয় খানিকটা গভীরে যে point আছে। কিন্তু 0 তো $[0, 1]$-এর গভীরে নেই, একেবারে এক প্রান্তে আছে! কিন্তু তাও এটা Y-এর relative metric-এর সাপেক্ষে A-র interior point, কারণ

$$0 \in N_Y\left(0, \tfrac{1}{2}\right) = N\left(0, \tfrac{1}{2}\right) \cap Y = \left[0, \tfrac{1}{2}\right) \subseteq A,$$

অর্থাৎ 0-কে ঘিরে আস্ত একটা open ball আছে A-র মধ্যে। ■

এই অংকটা মাথায় রেখে নীচের অংকটা কর।

Exercise 34: Consider the subspace $Y = [0, 1]$ of $\mathbb{R}$. Is 0 a boundary point of $A = \left[0, \frac{1}{2}\right]$ in Y? Is $\frac{1}{2}$ a boundary point of A in Y?
■

11.2 Discrete এবং অন্যান্য স্বার্থপর metric

আমরা প্রথম অধ্যায়ে discrete metric-এর সংজ্ঞা শিখেছিলাম--

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{if } x = y \\ 1 & \text{if } x \neq y \end{cases}.$$

এটাকে আমরা স্বার্থপরের metric বলেছিলাম। এবার এর কিছু ধর্ম শিখব। সেই সঙ্গে আরো কিছু metric-এর কথা শিখব, যাদের ধর্মও একই রকম।
প্রথম ধর্ম হল একটা discrete metric space-এ সব subset-ই open! এটাই প্রমাণ করব নীচের অংকটায়।

Example 32: Identify the open subsets of a discrete metric space.[2] **(2010.11cii)**

SOLUTION:

> If (X, d) is a discrete metric space, then
>
> $$\forall x \in X \quad N(x, 1) = \{x\}.$$
>
> So each singleton set is open.

এবার লক্ষ করো, যেকোনো set-কেই singleton set-দের union হিসেবে লেখা যায়, ওর element-গুলোকে আলাদা করে singleton set ভাবলেই হল। যেমন $\{1, 2, 3\} = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\}$. যদি set-টা infinite-ও হয়, তাতেও অসুবিধা নেই, যেমন $(0, 1) = \cup_{x \in (0,1)} \{x\}$.

> Since any set is union of singleton sets, and arbitrary union of open sets is open,
> hence all subsets are open.

■

নীচের অংকটাও একই জিনিস।

Example 33: Give an example of a metric space in which every finite set is open.[3] **(2013.5bi)**

SOLUTION:

> Let the metric space be $(\mathbb{N}, d)$, where $d(m, n) = |m - n|$.
> Then for each $n \in \mathbb{N}$, we have $N(n, 1) = \{n\}$.

কারণ integer-গুলো সবাই পর পর এক এক দূরত্বে রয়েছে। তাই $(n-1, n+1)$-এর মধ্যে integer বলতে খালি সবেধন নীলমণি n নিজে।

> So each singleton set is open.
>
> Since every set is a union of singletons, and arbitrary union of open sets is open, hence all subsets are open.
> In particular, all finite subsets are open, as required.

■

একটা বোকা-বোকা অংক দিয়ে তোমাকে ঠকানোর চেষ্টা করি--

Exercise 35: এমন একটা metric space দিতে পারো, যার মধ্যে finite আর infinite দুরকমের subset-ই আছে, কিন্তু কেবলমাত্র finite subset-রাই open? ■

আমরা জানি যে open-দের complement-রাই হল closed. তাই কোনো metric space-এ যদি সব set-ই open হয়, তবে তাদের complement হওয়ার সুবাদে সব set-ই আবার closed-ও হবে। সেটা নিয়েই নীচের অংকটা।

Example 34: Prove that every nonempty subset of a discrete metric space (X, ρ) is closed. [2] **(2011.11bii)**

SOLUTION: এখানে "nonempty" শব্দটার দরকার নেই, কারণ আমরা জানি যে ϕ যেকোনো metric space-এই একটা closed set.

> Let (X, ρ) be a discrete metric space, ie,
>
> $$\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{if } x = y \\ 1 & \text{if } x \neq y \end{cases}.$$
>
> So
>
> $$\forall x \in X \quad N(x, 1) = \{x\}.$$
>
> Since every set is a union of singleton sets, and arbitrary union of open sets is open, hence all sets are open in X.

> Since complements of open sets are closed, hence all sets are closed in X, as required.

■

লক্ষ করো, যেকোনো discrete metric space-এই point-গুলো খানিকটা ফাঁক ফাঁক করে বসানো থাকে। আমরা যে discrete metric-এর ফর্মুলাটা দিয়েছিলাম, সেখানে এই ফাঁকটা 1 নেওয়া হয়েছিল--

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{if } x = y \\ 1 & \text{if } x \neq y \end{cases}.$$

কিন্তু এখানে 1 সংখ্যাটা গুরুত্বপূর্ণ নয়। যেটা গুরুত্বপূর্ণ, সেটা হল প্রতিটা point-কে ঘিরে খানিকটা দূর পর্যন্ত অন্য কোনো point নেই। অংকের ভাষায়--

$$\forall x \in X \quad \exists \epsilon > 0 \quad N(x,\epsilon) = \{x\}.$$

যখনই কোনো metric space-এ এই শর্তটা খাটবে, সেটা একটা discrete metric space-এর মত আচরণ করবে। এরকম একটা metric রয়েছে নীচের অংকটায়।

Example 35: Prove that in a metric space $(\mathbb{N}, d)$, where

$$d(m,n) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|,$$

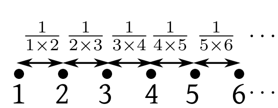
each singleton set is open.[2] **(2012.11cii)**

SOLUTION: আমরা দেখাব প্রতিটা $\{x\}$-কেই একটা open ball-এর আকারে লেখা যায়। ব্যস্, তাহলেই হয়ে যাবে, কারণ open ball-রা তো সকলেই open.

> Since in any metric space, sets of the form $N(x,\epsilon)$ are open, hence enough to show that
>
> $\forall x \in \mathbb{N} \quad \exists \epsilon > 0 \quad N(x,\epsilon) = \{x\}.$
>
> $\forall x$ Take any $x \in \mathbb{N}$.

এমনভাবে $\epsilon > 0$ নিতে হবে যাতে x-এর $< \epsilon$ দূরত্বের মধ্যে আর কোনো point না থাকে। তার জন্য x-এর নিকটতম প্রতিবেশীর দূরত্বটা জানা থাকা ভালো। ছবি দিয়ে ভাবলে আমাদের metric space-টা হল Fig 43-এর মত। লক্ষ করো যতই ডানদিকে যাচ্ছ, দূরত্বগুলো ততই কমছে। তাই যেকোনো x-এরই নিকটতম প্রতিবেশী হল $x+1$. এই নিকটতম প্রতিবেশীর দূরত্বটাকেই ϵ নিলে কাজ হবে (এর থেকে ছোটো ϵ নিলেও চলত)--

Fig 43



$\boxed{\exists\epsilon}$ Choose $\epsilon = d(x, x+1) > 0$.

এবার দেখাব $N(x,\epsilon) = \{x\}$, অর্থাৎ $N(x,\epsilon)$-এর মধ্যে x আছে, এবং অন্য কেউ নেই।

Then clearly, $x \in N(x,\epsilon)$.

If $y \in \mathbb{N}$ and $y > x$ then $y \geq x+1$.

So

$$d(x,y) = \tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{y} \geq \tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{x+1} = d(x,x+1) = \epsilon.$$

$\therefore y \notin N(x,\epsilon)$.

Also, if $y \in \mathbb{N}$ and $y < x$, then $y \leq x-1$.

So

$$d(x,y) = \tfrac{1}{y} - \tfrac{1}{x} \geq \tfrac{1}{x-1} - \tfrac{1}{x} = \tfrac{1}{x(x-1)} > \tfrac{1}{x(x+1)} = d(x,x+1) = \epsilon.$$

$\therefore y \notin N(x,\epsilon)$.

So $N(x,\epsilon) = \{x\}$, as required.

■

এই অংকটা যদি বুঝে থাকো, তবে এবারের অংকটা খুবই সহজে হওয়া উচিত।

Exercise 36: (X, d) is a metric space such that

$$\forall a \in X \quad \exists \delta_a > 0 \quad \forall x \in X \setminus \{a\} \quad d(a,x) > \delta_a.$$

Show that all subsets of X must be open. ■

11.3 Equivalent metric

এবার যে ধারণাটা সংক্ষেপে আলোচনা করব, সেটা metric space শেখার জন্য খুবই দরকারী হলেও সিলেবাসে এর কোনো উল্লেখ নেই। তবে যারা নিতান্ত পরীক্ষা পাশের জন্যও এই বইটা পড়ছ, তাদেরকেও বলব এই জায়গাটা হালকাভাবে একবার পড়ে নিতে।

Metric মানে দূরত্ব। আমরা প্রতিদিনকার জীবনে দূরত্ব ব্যবহার করি বিভিন্ন কাজে--কোথাও যেতে কত সময় লাগবে, বা কত পেট্রল পুড়বে, ইত্যাদি। এইসব কাজে দূরত্বটা নিজের জন্যই দরকারী। কিন্তু metric space-এর ক্ষেত্রে আমরা metric জিনিসটা ব্যবহার করি একটু ঘুরপথে। সেখানে আমরা metric ব্যবহার করে অন্যান্য জিনিসের সংজ্ঞা তৈরী করি, এবং কাজ করি আসলে সেই জিনিসগুলো নিয়ে, যেমন open set, closed set, limit point, ইত্যাদি। একটা উদাহরণ দিলে প্রতিদিনের জীবনে দূরত্বের ব্যবহার সঙ্গে metric space-এর অংকের এই পার্থক্যটা বোঝা যাবে।

Example 36: ধরো কাজ করছি $\mathbb{R}$ নিয়ে, যেটাকে একটা লম্বা লাইন বলে কল্পনা করা যায়। এবার একজন এই লাইন বরাবর দৈর্ঘ্য মাপছে ইঞ্চি দিয়ে, তার metric-টাকে বললাম d_1. মানে যদি বলি $d_1(a,b) = 5$, তার মানে a এবং b বিন্দুদুটোর মধ্যে দূরত্ব 5 ইঞ্চি। আরেকজন ঠিক করেছে দূরত্ব মাপবে সেন্টিমিটার দিয়ে, তার metric-টার নাম দিলাম d_2. সুতরাং যেকোনো ডুটো বিন্দু x, y দিলে সব সময়েই $d_2(x,y) = 2.54 \times d_1(x,y)$ হবে। বুঝতেই পারছ ডুজনেই আসলে সেই একই জ্যামিতিক দূরত্বই মাপছে, পার্থক্য খালি এককের। সুতরাং $(\mathbb{R}, d_1)$ metric space-এ যে subset-গুলো open হবে, $(\mathbb{R}, d_2)$-তেও ঠিক তারাই open হতে বাধ্য। একই কথা খাটবে closed set, limit point, interior, boundary point ইত্যাদি ক্ষেত্রেও। সুতরাং যদিও d_1 মোটেই d_2-র সমান নয়, কিন্তু metric space হিসেবে $(\mathbb{R}, d_1)$ এবং $(\mathbb{R}, d_2)$-র

আচরণ একেবারেই এক। ■

যদি একই set X-এর উপরে দুটো metric d_1, d_2 এমন হয় যে (X, d_1) এবং (X, d_2)-র যাবতীয় আচরণ একই, তবে আমরা d_1 আর d_2-কে পরস্পরের সঙ্গে **equivalent** বলি। এই কথাটাকে অংকের ভাষায় গুছিয়ে লেখার পথে একটাই অন্তরায়--"যাবতীয় আচরণ" বলতে ঠিক কী বোঝাচ্ছি? এই নিয়ে পণ্ডিতেরা অনেক চিন্তা ভাবনা করে একটা সহজ উত্তরে পৌঁছেছেন--যদি (X, d_1)-এর open set-রা আর (X, d_2)-র open set-রা একদম একই হয়, তাহলেই বাকি সবই মিলতে বাধ্য। যেমন ধরো open-রা যদি একই হয়, তবে তাদের complement হওয়ার সুবাদে closed set-রাও একই হবেই। একইভাবে দেখানো যায় যে limit point, interior, closure ইত্যাদি সবকিছুও খালি open set-দের উপরই নির্ভর করে! এই তথ্যটা অংকের জগতে অন্যতম গুরুত্বপূর্ণ ধারণা বলে স্বীকৃত। এর ফলে অংকের একটা নতুন শাখারই জন্ম হয়েছে--**topology**. আমরা অবশ্য সে প্রসঙ্গে যাব না। বরং দুটো metric-কে কখন equivalent বলে, তার সংজ্ঞাটা অংকের ভাষায় গুছিয়ে লিখে ফেলি--

> DEFINITION: **Equivalent metric**
>
> Let X be any nonempty set, and let d_1, d_2 be two metrics on X. We call the two metrics **equivalent** if a subset $A \subseteq X$ is open in (X, d_1) if and only if it is open in (X, d_2).

দুটো equivalent metric-এর উদাহরণ তো দেখেইছি--ইঞ্চিতে মাপা আর সেন্টিমিটারে মাপা। এই ক্ষেত্রে ওদের equivalent বলে বুঝতে অসুবিধা হয় না। কিন্তু অনেক সময়ে রীতিমত আলাদা দেখতে দুটো metric-কে equivalent হতে দেখা যায়! এরকম কয়েকটা উদাহরণ বলি।

Example 37: আমরা দেখেছি যে $\mathbb{R}^n$-এর উপরে যেকোনো $p \geq 1$-র জন্যই একটা করে metric সম্ভব[2] যাকে বলে L_p metric–

$$d_p(x, y) = \left[\sum_1^n |x_i - y_i|^p\right]^{1/p},$$

যেখানে $x = (x_1, ..., x_p)$ আর $y = (y_1, ..., y_p)$. আরেকটা metric হল L_∞, যার সংজ্ঞা--

$$d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|.$$

শুনলে বিশ্বাস হওয়া শক্ত, কিন্তু $\mathbb{R}^n$-এর উপরে এই সবগুলো metric-ই আসলে equivalent! সেটা প্রমাণ করার একটা কায়দা আমরা একটু পরেই শিখব। ■

Example 38: আমরা দেখেছি যে (X, d) যদি একটা metric space হয়, তবে (X, d')-ও একটা metric space হবে, যেখানে

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \quad x, y \in X.$$

এই d আর d' সব সময়ে equivalent metric হবে। ■

[2]যদি $p \in (0, 1)$ হয়, তবেও L_p-metric সম্ভব, তবে সেখানে মাথার উপরে $\frac{1}{p}$-টা থাকে না।

লক্ষ কর যে এই উদাহরণে $d(x,y)$ যাই হোক না কেন, $d'(x,y)$ সব সময়েই ≤ 1 হতে বাধ্য। মানে d' হল একটা bounded metric. এই উদাহরণটার গুরুত্ব এখানেই--যে কোনো metric-ই অন্ততঃ একটা bounded metric-এর সঙ্গে equivalent.

অবশ্য একটা metric দিলে তার সঙ্গে equivalent একটা bounded metric আমরা আরও সহজেও পেতে পারি--

Example 39: যদি X-এর উপরে d একটা যে কোনো metric হয়, তবে আরেকটা metric হল

$$d''(x,y) = \min\{d(x,y), 1\}, \quad x, y \in X.$$

দেখতেই পাচ্ছ যে সব $x, y \in X$-এর জন্যই $d''(x,y) \leq 1$, তাই d'' একটা bounded metric. এটা দেখানো যায় যে d আর d'' আসলে equivalent. ■

Equivalent metric-দের কথা জেনে লাভ কী? লাভ এই যে, এমন হতেই পারে তোমাকে একটা metric space (X,d) নিয়ে কাজ করতে হবে, কিন্তু d একটা বেজায় জটিল দেখতে জিনিস। কিন্তু ধরো X-এর উপরে d-এর সঙ্গে equivalent আরেকটা metric d' তোমার জানা আছে, যেটা অনেক সহজ। সেক্ষেত্রে তোমার পক্ষে (X,d') নিয়ে কাজ করাই যথেষ্ট।

আমরা বেশ কিছু equivalent metric-এর উদাহরণ উল্লেখ করেছি, কিন্তু এ যাবৎ একটাও প্রমাণ করি নি। এবার প্রমাণের একটা কায়দা শিখব। যদি তোমাকে একই set X-র উপরে দুটো metric d_1 আর d_2 দিয়ে পরীক্ষা করতে বলি ওরা equivalent কিনা, কী করে করবে? এর একটা সহজ কায়দা আছে, যা দিয়ে অনেক সময়ে চোখে দেখেই বলে দেওয়া যায় ওরা equivalent হবে কিনা। তার জন্য মনে রেখো, কোনো metric space-এ ball-দের চেহারাটা metric-এর উপরে নির্ভর করে। আমাদের কায়দায় d_1 আর d_2-কে equivalent দেখানোর আগে তোমাকে জেনে নিতে হবে এই দুই metric-এ ball-দের চেহারা কীরকম। এইবার কায়দাটা বলি--

> যদি দ্যাখো যেকোনো d_1-এর ball-এর পেটেই তুমি কোনো একটা d_2-র ball ঢুকিয়ে দিতে পারছ, এবং বিপরীতপক্ষে যেকোনো d_2-র ball-এর পেটেই কোনো একটা d_1-এর ball ঢুকিয়ে দিতে পারছ, তবে d_1, d_2 অবশ্যই equivalent হবে!

এই শর্তটা d_1 আর d_2-র equivalent হবার জন্য একটা necessary and sufficient condition.

আমরা একটু আগেই বলেছি যে, L_p আর L_∞ metric-রা সবাই $\mathbb{R}^n$-এর উপরে equivalent. এবার দেখি বলে মধ্যে বল ঢোকানোর কায়দায় কীভাবে সেটা প্রমাণ করা যায়। নীচের অংকে আমরা $p = 2$ নিয়ে কাজ করেছি।

Example 40: দেখাও যে $\mathbb{R}^2$-র উপরে L_2 এবং L_∞ হল equivalent metric.

SOLUTION: আমরা জানি যে L_2-র ball-গুলো দেখতে গোল গোল Fig 44-এর মত, আর L_∞-র ball-গুলো দেখতে Fig 45-এর মত। এবার যদি তোমাকে যেকোনো a-কে কেন্দ্র করে একটা L_2-র ball দিই, তবে তুমি তার মধ্যে সব সময়েই একটা L_∞-র ball ঢুকিয়ে দিতে পারবে Fig 46-এর মত করে। আবার যদি একটা চৌকো ball দিই, তবে Fig 47-র মত করে তার পেটে একটা ছোটোমত গোল ball সব সময়েই ঢুকিয়ে দেওয়া যাবে। সুতরাং $\mathbb{R}^2$-র উপরে L_2 এবং L_∞ হল দুটো equivalent metric. ■

বলের মধ্যে বল ঢোকানো কায়দাটা কেন কাজ করে? প্রমাণটা ছোটোই, আগে কায়দাটাকে সুন্দর করে গুছিয়ে লিখে একটা theorem বানিয়ে নিই--

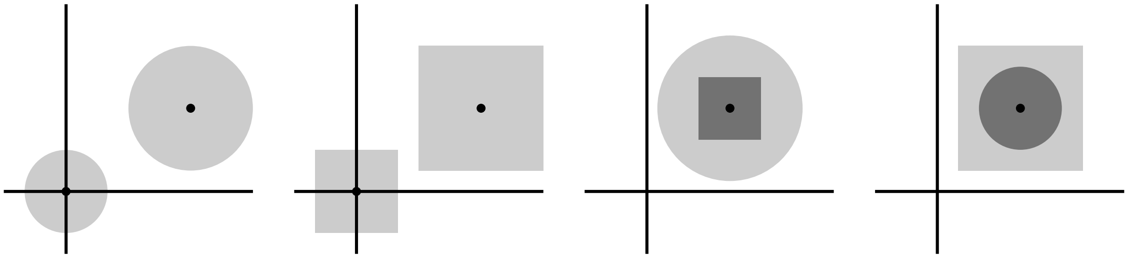


Fig 44 **Fig 45** **Fig 46** **Fig 47**

> **THEOREM**
>
> Let d_1, d_2 be two metrics on some nonempty set X. Let $N_1(\cdot,\cdot)$ and $N_2(\cdot,\cdot)$ denote balls w.r.t. these two metrics. Then d_1 and d_2 are equivalent if and only if both the following conditions hold:
>
> 1. $\forall a \in X \quad \forall r > 0 \quad \exists s > 0 \quad N_2(a,s) \subseteq N_1(a,r)$,
> 2. $\forall a \in X \quad \forall r > 0 \quad \exists s > 0 \quad N_1(a,s) \subseteq N_2(a,r)$.

Proof: এই theorem-টার প্রমাণটা এইরকম--ধরো আমাদের হাতে এরকম দুটো d_1 আর d_2 আছে। এবার যে কোনো একটা $A \subseteq X$ নাও। আমাদের দেখাতে হবে যে, যদি A-টা d_1-এর সাপেক্ষে open হয়, তবে d_2-র সাপেক্ষেও open হবে। আবার বিপরীতপক্ষে, যদি d_2-র সাপেক্ষে open হয়, তবে d_1-এর সাপেক্ষেও তাই হবে। বুঝতেই পারছ, এর মধ্যে একটা দিক প্রমাণ করলেই অন্যদিকটাও প্রমাণ হয়ে যাবে, d_1 আর d_2-র স্থানবিনিময় করলেই।
সুতরাং ধরো A হল d_1-এর সাপেক্ষে open, মানে

$$\forall a \in A \quad \exists r > 0 \quad N_1(a,r) \subseteq A.$$

তোমাকে দেখাতে হবে যে A-টা d_2-র সাপেক্ষেও open, অর্থাৎ

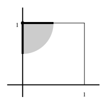
$$\forall a \in A \quad \exists s > 0 \quad N_2(a,s) \subseteq A.$$

Theorem-টার শর্ত থেকেই আমরা জানি যে, $N_1(a,r)$-এর মধ্যে একটা $N_2(a,s)$ ঢোকানো যায়। ব্যস্, তাহলেই হয়ে গেল, $N_2(a,s) \subseteq N_1(a,r) \subseteq A$. **[Q.E.D]**

Answers

1. $(-1,1) \cup \{2\}$. **3.** $B \setminus A = B \cap A^c$, যেটা দুটো closed set-এর intersection হওয়ার সুবাদে closed. **4.** হ্যাঁ। $A \setminus B = A \cap B^c$, যেটা দুটো open set-এর intersection বলে open. **5.** হ্যাঁ, কারণ $\phi^c = X$ এবং $X^c = \phi$. **6.** হ্যাঁ। ধরো $\{a\} \subseteq X$. যদি $b \in \{a\}^c$ হয়, তবে $r = d(a,b) > 0$ নাও। লক্ষ করো $N(b,r) \subseteq \{a\}^c$. **7.** $\because A$ বলেছে closed, তাই A^c হল open. তাই $x \in A^c$-কে ঘিরে এমন neighbourhood S পাবে, যাতে $S \subseteq A^c$ হয়। **8.** না। যেমন $A = (0,1)$ আর $b = 0$ নিলেই দেখা যাচ্ছে। **9.** ϕ. **10.** না, ($\mathbb{R}$, Euclidean)-এর মধ্যে $\mathbb{Q}$ আর $\mathbb{Q}^c$ দুজনের interior-ই ϕ. **11.** Euclidean-এর বেলায় $(0,1)$ এবং discrete-এর বেলায় $[0,1) \cup \{2\}$ নিজেই। **12.** হ্যাঁ। $x \in A^\circ \implies \exists \delta > 0 \quad N(x,\delta) \subseteq A \subseteq B \implies x \in B^\circ$. **13.** A° জানি open, তাই ওর interior ও নিজেই। **15.** না, $A^\circ = (0,1), B^\circ = (1,2), (A \cup B)^\circ = (0,2)$. সুতরাং এ ক্ষেত্রে $(A \cup B)^\circ = (0,2) \neq (0,1) \cup (1,2) = A^\circ \cup B^\circ$. **16.** $(\mathbb{Q}^c)' = \mathbb{R}$ এবং $\left\{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}' = \{0\}$.
17. $X' = \phi$. আসলে একটা discrete metric space-এ যেকোনো set-এর derived set-ই হল ϕ. **18.** না,

discrete metric space-এ যেকোনো set-এরই derived set হল ϕ. **20.** (i) ঠিক। (ii) নাও হতে পারে, discrete metric space-এ $X' = \phi \neq X$.। (iii) নাও হতে পারে, ($\mathbb{R}$, Euclidean)-এ $A = (0, \infty)$. (iv) ঠিক। (v) ঠিক। (vi) নাও হতে পারে, ($\mathbb{R}$, Euclidean)-এ $A = (0,1), B = (1,2)$. (vii) ঠিক, কারণ A' হল closed. $(viii)$ নাও হতে পারে, $A = \left\{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$ নিলে $A' = \{0\}$, কিন্তু $(A')' = \phi$. **21.** (i) $[0,1] \cup \{2\}$. (ii) $\mathbb{R}$. (iii) $\mathbb{Z}$. **22.** Discrete metric space-এ যেকোনো derived set-ই তো ϕ.
23. $A = \overline{A} \iff A = A \cup A' \iff A' \subseteq A$. **24.** যেহেতু $\overline{A}$ হল closed, তাই ওর closure ও নিজেই।
26. Closed-দের intersection-রা closed হয়, তাই $\cap B_\alpha$ অবশ্যই closed. সব B_α-র ভিতরেই A আছে, তাই intersection-টার ভিতরেও আছে। এর চেয়ে ছোটো কোনো closed set থাকতে পারে না, যার মধ্যে A আছে, কারণ যদি থাকত, তবে সেটাও কোনো একটা B_α হত, ফলে intersection-টাকে আরো ছোটো করে দিত। **27.** কোনোটাই নয়। ($\mathbb{R}$, Euclidean)-এর মধ্যে $A = (0,1)$ আর $B = (0,2)$ নিয়ে ভাবো। **28.** $A = (0,1) \cap \mathbb{Q}$ এবং $B = (0,1) \cap \mathbb{Q}^c$.
29. $z \in \overline{A} \iff \left[z \in A \text{ or } z \in A'\right] \iff \left[\{z\} \cap A \neq \phi \text{ or } \forall \epsilon > 0 \quad N'(z,\epsilon) \cap A \neq \phi\right]$
$\iff \left[\forall \epsilon > 0 \quad N(z,\epsilon) \cap A \neq \phi\right]$. **31.** (i) $\{1, 2, ..., 6\}$, (ii) $(0, 0.3)$, (iii) $(-3, 2) \cup \{3\}$.

32.  **33.** (i) closed. (ii) open. (iii) কোনোটাই নয়। (iv) দুটোই। (v) কোনোটাই নয়। (vi) দুটোই।
34. না, যেহেতু 0 হল A-এর একটা interior point, তাই ওটা A-র boundary point হতে পারে না। তবে $\frac{1}{2}$ অবশ্যই A-র boundary point. **35.** অসম্ভব, infinite subset থাকতে হলে X-এর নিজেকেই infinite হতে হবে, এবং X নিজেই তো open! **36.** $N(a, \delta_a) = \{a\}$. তাই singleton-রা সবাই open. তাদের union হওয়ার সুবাদে সব set-ই open.

Chapter III
Completeness

DAY 12
Sequences (part 1)

12.1 কী করতে চলেছি

আগেই বলেছি যে metric space-এর ধারণাটা এসেছে real analysis থেকে। আমরা জানি যে real analysis-এর পিছনে একটা অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ জিনিস হল completeness axiom:

> $\mathbb{R}$-এর যেকোনো nonempty, bounded above subset-এরই একটা supremum থাকে।

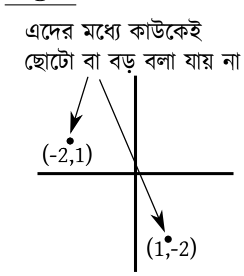
একটু ভাবলেই বুঝবে যে real analysis-এর একটা বড় অংশের মূলেই রয়েছে এটা--

- আমরা বার বার করে যে ব্যবহার করি $\frac{1}{n} \to 0$, সেটার প্রমাণ এই axiom-টা ছাড়া অসম্ভব।
- $\mathbb{Q}$ যে $\mathbb{R}$-এর মধ্যে dense, সেটাও আসে এই axiom-টা থেকেই।
- $\mathbb{R}$-এর মধ্যে Cauchy sequence-রা যে converge করে, সেই কথাটাও বার বার কাজে আসে। তার প্রমাণটাও দাঁড়িয়ে আছে completeness axiom-এর উপর।

সুতরাং completeness axiom একটা খুবই দরকারী জিনিস, এবং তার মূলে রয়েছে supremum. লক্ষ কর যে supremum-এর জন্য upper bound লাগে, এবং তার জন্য লাগে দুটো সংখ্যাকে $\leq$ দিয়ে তুলনা করা। সমস্যা হল সব metric space-এর বেলায় $\leq$-এর ধারণাটা খাটে না! যেমন ধরো নীচের উদাহরণটা।

Example 1: আমরা কাজ করব ($\mathbb{R}^2$, Euclidean) নিয়ে। যদি এর মধ্যে দুটো point দিই, ধরো, $(1, -2)$ আর

Fig 1



f-কে বড় বলবে, নাকি g-কে?

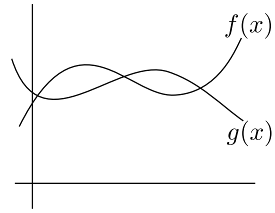


Fig 2

$(-2, 1)$, তবে এদের মধ্যে তুমি কাকে বড় বলবে, আর কাকে ছোটো? Fig 1 দ্যাখো। ■

আরেকটা উদাহরণ এইরকম--

Example 2: $C[0, 1]$-এর কথা ভাবো। এর প্রতিটা element হল $[0, 1]$ থেকে $\mathbb{R}$-এ একটা continuous function. যদি তোমাকে Fig 2-এর মত দুটো element দিই, তবে তুমি নিশ্চয়ই $f \leq g$ বা $g \leq f$ এরকম কিছু বলতে পারো না! ■

সুতরাং সব metric space-এর ক্ষেত্রে $\leq$-এর ধারণাটা নেই। ফলে upper bound বা supremum-এর প্রসঙ্গও ওঠে না। কিন্তু মজার কথা হচ্ছে, তাও আমরা completeness axiom নিয়ে কাজ করতে পারি, সম্পূর্ণ অন্য একটা পথে! সেটাই এই অধ্যায়ের আলোচ্য বিষয়। এবং এই কাজে প্রধান ভূমিকা পালন করবে sequence-রা।

12.2 Metric space-এর মধ্যে sequence

ধরো (X, d) একটা metric space. তার মধ্যে একটা **sequence** মানে হল এরকম একটা জিনিস--

$$a_1, a_2, a_3, ...,$$

যেখানে a_n-রা সবাই X-এর element. আমরা সংক্ষেপে এটাকে লিখি[1] $\{a_n\}_n$. আমরা যখন real analysis শিখেছিলাম, তখন নানারকম sequence নিয়ে কাজ করেছিলাম--

- bounded/unbounded,
- increasing/decreasing,
- convergent, ইত্যাদি।

এদের মধ্যে যাদের জন্য X-এর element-দেরকে $\leq$ দিয়ে তুলনা করার প্রয়োজন হয়, সেগুলো সব metric space-এর জন্য করা যাবে না, যেমন increasing বা decreasing. কিন্তু bounded বা unbounded sequence-এর ব্যাপারটা সব metric space-এর ক্ষেত্রেই কাজ করে। Convergence-এর ব্যাপারটাও তাই। এদের সংজ্ঞাগুলো শেখা যাক।
আমরা $\{a_n\}_n$-কে bounded বলব যদি পুরো sequence-টাকেই কোনো একটা ball-এর মধ্যে পুরে ফেলা যায়--

DEFINITION: **Bounded sequence**

Let (X, d) be a metric space. Let $\{a_n\}_n$ be a sequence in X. It is called a **bounded** sequence if

$$\exists a \in X \ \exists r > 0 \quad \{a_n\}_n \subseteq N(a, r).$$

[1] অনেক আন্তর্জাতিক মানের বইতে (a_n)-ও লেখা দেখবে।

একটা sequence দেখলেই প্রথম যে প্রশ্নটা মনে আসে সেটা হল sequence-টা converge করে কিনা, অর্থাৎ metric space-টার মধ্যে এমন কোনো element আছে কিনা, যেটা এই sequence-টার limit. এই সংজ্ঞাটা একেবারেই real analysis-এর মতই--

DEFINITION: Convergence

Let (X, d) be a metric space. Let $\{a_n\}_n$ be a sequence in X, and let $\ell \in X$. We say that $\{a_n\}_n$ converges to ℓ and write $a_n \to \ell$ or $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ if

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad d(a_n, \ell) < \epsilon.$$

Real analysis-এর ক্ষেত্রে সংজ্ঞাটাতে ছিল $|a_n - \ell| < \epsilon$, এখানে তার জায়গায় $d(a_n, \ell) < \epsilon$, এই যা পার্থক্য। এই সংজ্ঞাতে d-র ভূমিকাটা লক্ষ কর। যদি d-টা বদলে দিই, তবে একটা convergent sequence কিন্তু convergent নাও থাকতে পারে। এইটা নিয়েই এবারের অংকটা।

Example 3: Consider the metric spaces $(\mathbb{R}, d_1)$, $(\mathbb{R}, d_2)$ where $d_1(x, y) = |x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ and d_2 is the discrete metric on $\mathbb{R}$. Show that the sequence $\{\frac{1}{n}\}_n$ converges to 0 in $(\mathbb{R}, d_1)$ and $\{\frac{1}{n}\}_n$ does not converge to 0 in $(\mathbb{R}, d_2)$.[2] **(2011.11ci)**

SOLUTION: Discrete metric হল স্বার্থপরের metric: যদি $x \neq y$ হয়, তবে সব সময়েই $d_2(x, y) = 1$ হবে। অবশ্য $x = y$ হলে $d_2(x, y) = 0$ হতেই হবে, কারণ সেটা metric-এর সংজ্ঞাতেই বলা আছে।

অংকটার প্রথম অংশ আমাদের পূর্বপরিচিত, কারণ d_1 হল Euclidean metric, মানে real analysis শেখার সময়ে যে metric নিয়ে কাজ করি। এই metric-এর বেলায় $n \to \infty$ হলে $\frac{1}{n} \to 0$ হয়--

First part: Shall show $\frac{1}{n} \to 0$ in $(\mathbb{R}, d_1)$, ie,

$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad d_1\left(\frac{1}{n}, 0\right) < \epsilon.$

$\forall\epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

By Archimedian property of $\mathbb{R}$,

$\exists N \in \mathbb{N} \quad N\epsilon > 1$,

or, $\frac{1}{N} < \epsilon$.

$\exists N$ Choose this $N \in \mathbb{N}$.

$\forall n$ Take any $n \geq N$.

Then

$$d_1\left(\tfrac{1}{n}, 0\right) = \left|\tfrac{1}{n} - 0\right| = \tfrac{1}{n} \leq \tfrac{1}{N} < \epsilon,$$

as required.

এইবার discrete metric নিয়ে কাজ করতে হবে। মনে রেখো, n যতই বড় হবে $\frac{1}{n}$ ততই ছোটো হবে, কিন্তু 0-র সমান তো কখনোই হবে না। আর discrete metric হল স্বার্থপরের metric, অতি নিকট জনের সঙ্গেও স্বার্থপর লোকে দূরত্ব বজায় রাখে। তাই যাই $n \in \mathbb{N}$ নাও না কেন, $d_2\left(\frac{1}{n}, 0\right)$ সর্বদাই 1 হয়ে বসে থাকবে। এই কথাটাই এবার গুছিয়ে লিখব।

Second part: To show $\frac{1}{n} \not\to 0$ in $(\mathbb{R}, d_2)$, ie,

$\exists \epsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq N \qquad d_2\left(\frac{1}{n}, 0\right) \geq \epsilon.$

এইটা কী করে পেলাম? "$\frac{1}{n} \to 0$"-র সংজ্ঞাটাকে উল্টে। আমরা জানি যে $(\mathbb{R}, d_2)$-তে "$\frac{1}{n} \to 0$" মানে হল

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad d_2\left(\frac{1}{n}, 0\right) < \epsilon.$$

এটার negation বানিয়েছি সব $\forall$-গুলোকে উল্টে $\exists$, এবং $\exists$-টাকে উল্টে $\forall$ করে দিয়ে। আর সব শেষের $<$-টাকে উল্টে $\geq$ করে দিয়েছি।

$\exists\epsilon$ Choose $\epsilon = 1 > 0$.

যে কোনো $0 < \epsilon \leq 1$ নিলেই চলত।

$\forall N$ Take any $N \in \mathbb{N}$.

$\exists n$ Choose $n = N$.

Then $\frac{1}{n} \neq 0$. So $d_2(\frac{1}{n}, 0) = 1$.
Hence $d_2(\frac{1}{n}, 0) \geq 1 = \epsilon$, as required.

■

গতকাল দেখি একজন আমাকে Facebook-এর একটা group-এর সদস্য করে দিয়েছে। Group-টার নাম হল Analysis problems. সেই group-টায় একজন একটা মজার অংক দিয়েছে দেখলাম। অংকটা নীচে দিচ্ছি। ধাঁধা হিসেবে করতে ভালো লাগলে কর, নইলে নীচের তিনটে অংক বাদ দিয়ে গেলেও বাকি জিনিস বুঝতে অসুবিধা হবে না।

Exercise 1: $\mathbb{R}$-এর উপরে এমন একটা metric দেওয়া কি সম্ভব যাতে $\frac{1}{n} \to 113$ হয়?

HINT:
একজন উত্তর দিয়েছে যে সেটা অসম্ভব, কারণ সবাই জানে যে $\frac{1}{n} \to 0$ হয়। কিন্তু সত্যিই কি তাই? একটা ছোট্টো hint দিই-- ধরো $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ হল একটা one-one function. তবে

$$d(x, y) = |f(x) - f(y)|$$

কিন্তু একটা metric হবে। (এইটা প্রথম অধ্যায়ের একটা অংকে প্রমাণ করতে দিয়েছিলাম)। এবার চিন্তা কর তো f-টাকে কায়দা করে নিলে $\frac{1}{n} \to 113$ বানানো যায় কিনা! ■

এই অংকটা দেখে উৎসাহিত হয়ে আমি নীচের অংকটা বানিয়েছি। চেষ্টা করে দ্যাখো।

Exercise 2: এমন একটা metric দিতে পারো $\mathbb{R}$-এর উপরে যাতে $\frac{1}{n} \to 113$ হয় অথচ $-\frac{1}{n} \to 0$-ই থাকে? ■

Exercise 3: উপরের অংকটা Facebook-এ দেওয়ার কিছুক্ষণের মধ্যেই একজন লিখেছে যে এমনটা হতেই পারে না, কারণ

$$\frac{1}{n} + \left(-\frac{1}{n}\right) = 0,$$

সুতরাং দু'দিকের limit নিলে হচ্ছে

$$0 = \lim \left[\tfrac{1}{n} + (-\tfrac{1}{n})\right] = \lim \tfrac{1}{n} + \lim(-\tfrac{1}{n}) = 113 + 0,$$

বা $113 = 0$, যেটা অসম্ভব! বল তো এই যুক্তিতে ভুলটা কোথায়? ■

Example 4: If $\{x_n\}$ and $\{y_n\}$ are two convergent sequences in a metric space (X, d), then show that the sequence $\{d(x_n, y_n)\}$ is also convergent in $(\mathbb{R}, d_u)$ where d_u denotes the usual metric in $\mathbb{R}$.[2] **(2012.11di)**

SOLUTION:

Let $x_n \to x$ and $y_n \to y$ in (X, d).

তার মানে n যদি যথেষ্ট বড় নিই, তবে x_n আর x খুব কাছাকাছি থাকবে, এবং y_n আর y-ও খুব কাছাকাছি থাকবে। সুতরাং $d(x_n, y_n)$ আর $d(x, y)$-ও যে পরস্পরের কাছাকাছি থাকবে সেটাই স্বাভাবিক। মানে $d(x_n, y_n)$-গুলো গিয়ে converge করবে $d(x, y)$-তে। এটাই আমরা প্রমাণ করব।

Shall show that $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$ in $(\mathbb{R}, d_u)$,

ie,

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |d(x_n, y_n) - d(x, y)| < \epsilon.$$

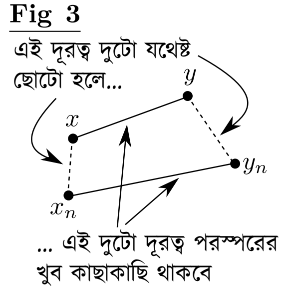
মনে রেখো যে d_u হল Euclidean metric, তাই $d_u(d(x_n, y_n), d(x, y)) = |d(x_n, y_n) - d(x, y)|$.

$\forall\epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

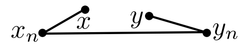
এবার একটা জুৎসই $N \in \mathbb{N}$ পেতে হবে। কী করে এগোব সেটা Fig 3 দেখলে বুঝবে। আমরা জানি যে n যথেষ্ট বড় নিলে x_n আর x-এর দূরত্ব যত খুশী ছোটো করা যায়, এবং y_n আর y-এর দূরত্বকেও যত খুশী কমানো যায়। সুতরাং x_n যদি প্রায় x-ই হয়, এবং y_n প্রায় y-ই হয়, তবে নিশ্চয়ই $d(x_n, y_n)$ হবে প্রায় $d(x, y)$. সেটা প্রমাণের মূল কায়দাটা আগে সহজ ভাষায় বুঝিয়ে নিই। আমাদের দেখাতে হবে $|d(x_n, y_n) - d(x, y)| < \epsilon$. এটাকে আমরা দু ধাপে ভেঙে দেখাব, $d(x_n, y_n) - d(x, y) < \epsilon$ আর $d(x, y) - d(x_n, y_n) < \epsilon$. দুটো ধাপেই triangle inequality কাজে দেবে। প্রথম ধাপে আমরা x_n থেকে y_n-এর যাব এই পথে--



Fig 3



আর পরের ধাপে x থেকে y-তে যাব এই পথে--



সুতরাং যদি N-টাকে এমনভাবে নিতে পারি, যাতে $n \geq N$ হলে $d(x_n, x)$ এবং $d(y_n, y)$ দুজনেই $< \frac{\epsilon}{2}$ হয়, তবেই দুক্ষেত্রেই কাজ হয়ে যাবে। এইটা মাথায় রেখে নীচের খুঁটিনাটিগুলো পড়।

> $\because x_n \to x$ in (X, d),
> $\therefore \exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_1 \quad d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}$.
> Similarly, $\because y_n \to y$ in (X, d),
> $\therefore \exists N_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_2 \quad d(y_n, y) < \frac{\epsilon}{2}$.
> $\boxed{\exists N}$ Choose $N = \max\{N_1, N_2\} \in \mathbb{N}$.
> $\boxed{\forall n}$ Take any $n \geq N$.
> Then, by triangle inequality,
> $$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n),$$
> and so
> $$d(x_n, y_n) - d(x, y) \leq d(x_n, x) + d(y, y_n) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

এবার $d(x, y) - d(x_n, y_n)$-কে ছোটো দেখানোর পালা--

> Again, by triangle inequality,
> $$d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y),$$
> and so
> $$d(x, y) - d(x_n, y_n) \leq d(x, x_n) + d(y_n, y) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

ব্যস্, দুটো ধাপে মিলিয়ে পেয়ে যাচ্ছি--

> So
> $$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| < \epsilon,$$
> as required.

এই অংকটা বিস্তারিতভাবে লিখে করেছি, তাই সমাধানটা একটু লম্বা হয়েছে। চাইলে তুমি একই যুক্তি খানিকটা সংক্ষেপেও লিখতে পারো, এইভাবে--

<u>বিকল্প পদ্ধতি</u>

> By triangle inequality,
> $$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n).$$

So

$$d(x_n, y_n) - d(x, y) \le d(x_n, x) + d(y, y_n).$$

Again, by triangle inequality,

$$d(x, y) \le d(x, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y).$$

So

$$d(x, y) - d(x_n, y_n) \le d(x, x_n) + d(y_n, y).$$

Combining,

$$\begin{aligned} 0 \le |d(x,y) - d(x_n, y_n)| &\le d(x, x_n) + d(y_n, y) \\ &\to 0 + 0 = 0, \end{aligned}$$

as required.

■

Exercise 4: If $\{x_n\}_n$ and $\{y_n\}_n$ are convergent sequences in a metric space (X, d) show that $\lim d(x_n, y_n)$ exists.[3] **(2007.11bp1)**
HINT: আগের অংকটাই। ■

DAY 13
Sequences (part 2)

আজকে আমরা metric space-এর মধ্যে sequence-দের নিয়ে আরো অংক দেখব।

Example 5: Let X be a non-empty set and consider the discrete metric d defined on X. Show that all convergent sequences in (X, d) are eventually constant sequences.[2] **(2009.11ei)**
SOLUTION: এখানে "eventually constant sequence" বলে একটা কথা ব্যবহার করেছে। এর মানে হল এমন sequence যেখানে একটা পর্যায়ের পর থেকে term-গুলো সব সমান হয়ে যায়, আর পরিবর্তিত হয় না। Fig 4 আর Fig 5 দ্যাখো। অংকের ভাষায় $\{a_n\}_n \subseteq X$-কে একটা "eventually constant sequence" বলব যদি

$$\exists a \in X \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \ge N \quad a_n = a.$$

Fig 4

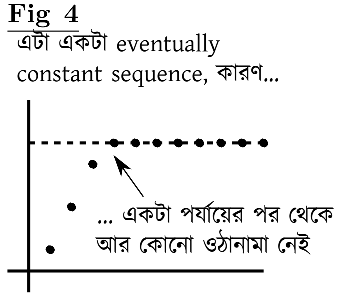
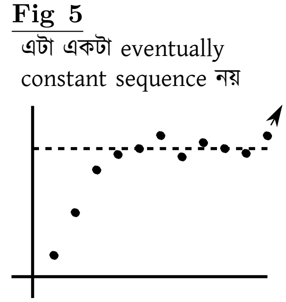


Fig 5



এবার তবে প্রমাণটা শুরু করি। প্রথমে discrete metric-এর সংজ্ঞাটা লিখে নিই--

We have

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \neq y \\ 0 & \text{if } x = y \end{cases}.$$

Let $a_n \to \ell$ in (X,d).

Shall show that $\{a_n\}$ is an eventually constant sequence, ie,

$$\exists a \in X \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad a_n = a.$$

যেহেতু limit-টা হল ℓ, তাই eventually constant sequence হতে হলে a-টা সেই ℓ-ই হতে বাধ্য।

$\boxed{\exists a}$ Choose $a = \ell$.

$\because \lim a_n = \ell$, $\therefore \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad d(a_n, \ell) < 1$.

এটা বস্তুতঃ convergence-এর সংজ্ঞাটাই, খালি ϵ-এর জায়গায় 1 নিয়েছি।

$\boxed{\exists N}$ Choose this $N \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\forall n}$ Take any $n \geq N$.

Then $d(a_n, a) < 1$, and so $d(a_n, a) = 0$ or $a_n = a$, as required.

এখানে $d(a_n, a) = 0$ হল, কারণ $d(a_n, a)$-টা 1 আর 0 ছাড়া আর কিছু হতে পারে না। যেহেতু < 1 বলেছে, তাহলে 0-ই হতে বাধ্য। ■

এবারের অংকটাতে real analysis থেকে uniform convergence-এর ধারণাটা কাজে লাগবে। এ নিয়ে আমাদের বাংলায়-বোঝানো-ইংরাজি-বই সিরিজের Real Analysis বইতে বিস্তর আলোচনা আছে। পাছে ভুলে গিয়ে থাকো, তাই এখানে একবার সংক্ষেপে মনে করিয়ে দিচ্ছি। ধরো $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ একটা function দেওয়া আছে, এবং একটা sequence দেওয়া আছে $f_1, f_2, f_3, \ldots$ ইত্যাদি, যারাও সকলেই $[a,b]$ থেকে $\mathbb{R}$-এ function. যদি বলি f_n-রা সবাই f-এ converge করে, তবে তার মানে কী? একটা উদাহরণ দেখা যাক। ধরো $f_n(t) = t^n$, যেখানে $t \in [0,1]$. আর $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t \in [0,1) \\ 1 & \text{if } t = 1 \end{cases}$. তবে নিশ্চয়ই কোনো সন্দেহ নেই যে, যাই $t \in [0,1]$ নাও না কেন $f_n(t) \to f(t)$ হবে। যেমন $f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0 = f\left(\frac{1}{2}\right)$, বা $f_n(1) = 1^n \equiv 1 \to 1 = f(1)$. অংকের ভাষায়--

$$\forall t \in [0,1] \quad \underbrace{\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |f_n(t) - f(t)| < \epsilon.}_{\text{অর্থাৎ } f_n(t) \to f(t)} \tag{*}$$

Fig 6

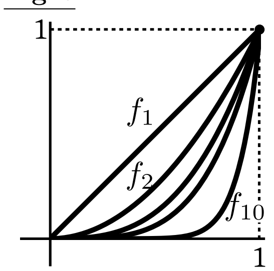


Fig 7

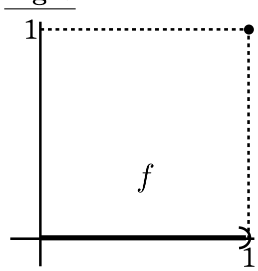
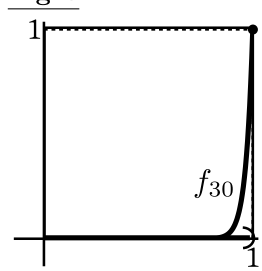


Fig 8



যদি গ্রাফ এঁকে ভাবার চেষ্টা করি তবে কি f_n-এর গ্রাফগুলো f-এর গ্রাফের সঙ্গে ক্রমশঃ মিশে যাবে? Fig 6-এর বেশ কয়েকটা f_n-এর গ্রাফ এঁকেছি, আর Fig 7-এ দেখিয়েছি f-এর গ্রাফ। এখানে f_n-এর গ্রাফগুলো সত্যিই f-এর গ্রাফের সঙ্গে মিশে যাচ্ছে কিনা বোঝার জন্য Fig 8-এ f_{30} আর f-এর গ্রাফ এক সঙ্গে দেখিয়েছি। লক্ষ করো, প্রথম দিকটায় গ্রাফ দুটোকে আলাদাই করা যাচ্ছে না, কিন্তু 1-এর কাছটায় এসে f_{30}-র গ্রাফটা একেবারে সটান ফণা তুলে f-এর থেকে সরে গেছে। যাই f_n নাও না কেন, এই ফণা তোলার ব্যাপারটা থাকবেই, n যত বাড়বে, ফণাটা ততই সরু হবে, কিন্তু ওর উচ্চতা একই থাকবে। সুতরাং f_n-এর গ্রাফগুলো কখনওই f-এর গ্রাফের সঙ্গে একেবারে মিশে যাবে না। যদি (*)-এর দিকে তাকাও, তাহলে ব্যাপারটা অংকের ভাষা দিয়েও বোঝা যায়। প্রতিটা t-এর জন্যই এমন N আছে যাতে $n \geq N$ হলেই $|f_n(t) - f(t)| < \epsilon$ হবে। সমস্যা হল $\exists N$-টা রয়েছে $\forall t$-এর পরে, ফলে N-টা t-এর উপরে নির্ভর করতে পারে। ফলে এমন N পাওয়া অসম্ভব হতেই পারে যেটা সব t-এর জন্যই কাজ করে। যদি সেরকম N পেতাম, তবে $n \geq N$ হলেই f_n-এর পুরো গ্রাফটাই f-এর গ্রাফের খুব কাছে চলে আসত, ফণা-টণার কোনো সীন্ থাকত না! আমাদের এই উদাহরণেই সেটা হত, যদি আমরা $[0,1]$-এর উপরে কাজ না করে খালি $\left[0, \frac{1}{2}\right]$-এর উপরে কাজ করতাম, কারণ তখন ফণাটা হিসেবের বাইরে চলে যেত। তখন সত্যিই বলা যেত যে f_n-এর গ্রাফরা f-এর গ্রাফের সঙ্গে ক্রমশঃ মিশে যাচ্ছে। এই ক্ষেত্রে আমরা অংকের ভাষায় লিখতাম--

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \quad \forall n \geq N \quad |f_n(t) - f(t)| < \epsilon. \tag{**}$$

লক্ষ করো এখানে $\exists N$ রয়েছে $\forall t$-এর পরে। তাই এক N দিয়েই সব t-এর জন্য কাজ চলছে। এই (**)-কে আমরা বলি **uniform convergence**, আর (*)-কে বলি **pointwise convergence**. আশা করি বুঝতে অসুবিধা নেই যে uniform convergence হলে pointwise convergence-ও হতে বাধ্য।
যেকোনো metric space-এর জন্যই pointwise আর uniform convergence-এর সংজ্ঞা দেওয়া যায়--

DEFINITION: **Pointwise and uniform convergence**

Let A be any non-empty set, and let (X, d) be any metric space. Let $\{f_n\}_n$ be a sequence of functions from A to X. Let $f : A \to X$. We say that f_n converges to f **pointwise** if

$$\forall t \in A \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad d(f_n(t), f(t)) < \epsilon.$$

The convergence is called **uniform** if

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall t \in A \quad \forall n \geq N \quad d(f_n(t), f(t)) < \epsilon.$$

লক্ষ করো, এই সংজ্ঞায় A যেকোনো non-empty set হলেই চলছে, metric space হবার কোনো দরকার নেই।
এইবার আমরা নীচের অংকটায় হাত দেবার মত অবস্থায় এসেছি।

Example 6: Let $C[a, b]$ denote the metric space of all continuous functions defined on the closed and bounded interval $[a, b]$ with the usual metric

$$d(x(t), y(t)) = \sup_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)|.$$

Show that in this metric space, a sequence $\{x_n\}_n$ converges to x if and only if the corresponding sequence $\{x_n(t)\}_n$ converges uniformly to $x(t)$ on $[a, b]$.[5] **(2008.12b)**

SOLUTION: আমরা দেখেছি যে $\mathbb{R}^n$-এর উপরে usual metric বলতে Euclidean metric-ই বোঝায়। এখানে কিন্তু $C[a,b]$-র উপরে usual metric বলতে sup-metric বুঝিয়েছে। Usual metric ভাষাটার এই প্রয়োগ খুব প্রচলিত নয়। যাই হোক, দেখতে খটমট লাগলেও অংকটা কিন্তু একেবারেই সহজ--একই জিনিসকে দুইভাবে লেখা। ব্যাপারটা বোঝার জন্য প্রথমে একটা সহজ উদাহরণ দিই। ধরো একটা ক্লাসের সব ছাত্র অংক পরীক্ষা দিয়েছে। তাদের রেজাল্ট দেখে দুজনের দুরকম মন্তব্য--

- Highest নম্বরই তো দেখছি 50-এর কম।
- সব ছাত্রই তো 50-এর চেয়ে কম নম্বর পেয়েছে।

আশা করি সন্দেহ নেই যে এই দুটো মন্তব্যই আসলে সমার্থক, যদিও প্রথম মন্তব্যটা খালি highest নম্বরের জন্য, আর দ্বিতীয়টা ক্লাসের সবার নম্বরের জন্য। ঠিক একইভাবে যদি দুটো continuous function নিই $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ তাহলে নীচের দুটো বাক্যের একই মানে--

- $\sup\{|f(t) - g(t)| \ : \ t \in [a,b]\} < \epsilon$.
- $\forall t \in [a,b] \quad |f(t) - g(t)| < \epsilon$.

মনে রেখো, আমরা closed and bounded $[a,b]$-র উপরে continuous function-দের নিয়ে কাজ করছি, তাই sup মানে আসলে max. সেই জন্যই আমরা $< \epsilon$ লিখতে পেরেছি, নইলে $\leq \epsilon$ লিখতে হত।
এটা একটা if and only if জাতীয় প্রমাণ, তাই দুইধাপে করব, only if part এবং if part. প্রথমে only if part-এ দেখাব যে (X,d)-তে $x_n \to x$ হলে অবশ্যই $x_n \to x$ uniformly on $[a,b]$ হতে বাধ্য।

<ins>Only if part:</ins> Let $x_n \to x$ in (X,d). Shall show that $x_n \to x$ uniformly on $[a,b]$, ie,

$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \forall t \in [a,b] \quad |x_n(t) - x(t)| < \epsilon$.

$\forall\epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

$\because x_n \to x$ in (X,d),

$$\therefore \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad d(x_n, x) < \epsilon.$$

$\exists N$ Choose this $N \in \mathbb{N}$.

$\forall n, t$ Take any $n \geq N$ and any $t \in [a,b]$.

Then

$$\begin{aligned} |x_n(t) - x(t)| &\leq \sup_{a \leq s \leq b} |x(s) - y(s)| \quad [\because t \in [a,b]] \\ &= d(x_n, x) < \epsilon, \end{aligned}$$

as required.

দ্বিতীয় ধাপে উল্টোদিকটা দেখাব, মানে দেখাব $x_n \to x$ uniformly on $[a,b]$ হলে (X,d)-তে $x_n \to x$ হতে বাধ্য।

<ins>If part:</ins> Let $x_n \to x$ uniformly on $[a,b]$.

Shall show $x_n \to x$ in (X,d), ie,

$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad d(x_n, x) < \epsilon.$

$\boxed{\forall \epsilon}$ Take any $\epsilon > 0$.

$\because x_n \to x$ uniformly on $[a, b]$,

$$\therefore \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \forall t \in [a, b] \quad |x_n(t) - x(t)| < \epsilon.$$

$\boxed{\exists N}$ Choose this $N \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\forall n}$ Take any $n \geq N$.

Then $\forall t \in [a, b] \quad |x_n(t) - x(t)| < \epsilon$.

$\therefore \epsilon$ is an upper bound for the set

$$\{|x_n(t) - x(t)| \ : \ t \in [a, b]\}.$$

Now, $|x_n(t) - x(t)|$ is a continuous function. So

$$d(x_n, x) = \sup\{|x_n(t) - x(t)| \ : \ t \in [a, b]\} = \max\{|x_n(t) - x(t)| \ : \ t \in [a, b]\} < \epsilon,$$

as required.

■

Exercise 5: উপরের অংকের সমাধানটা ভালো করে পড়ে দ্যাখো। তারপর ভাবো তো $C[a, b]$-এর সব function-রাই যে continuous, সে কথাটা কোথায় কোথায় লেগেছে? ■

এবার নীচের অংকটা কর দেখি। এটা বস্তুতঃ আগের অংকটাই, খালি continuous-এর বদলে bounded বলা আছে (bounded শর্তটুকু দরকার, নইলে supremum নেওয়া যেত না)।

Exercise 6: Let $B[a, b]$ denote the metric space of all bounded functions defined on the closed and bounded interval $[a, b]$ with the metric

$$d(x(t), y(t)) = \sup_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)|.$$

Is the following statement true?

> "In this metric space, a sequence $\{x_n\}_n$ converges to x if and only if the corresponding sequence $\{x_n(t)\}_n$ converges uniformly to $x(t)$ on $[a, b]$."

■

13.1 A' এবং $\overline{A}$-এর সঙ্গে sequence-এর সম্পর্ক

A' আর $\overline{A}$-এর সঙ্গে sequence-এর একটা গুরুত্বপূর্ণ সম্পর্ক আছে, যেটা অনেক সময়ে খুব কাজে লাগে। সেগুলো এখানে সংক্ষেপে আলোচনা করে নিই।

THEOREM

Let (X, d) be a metric space and let $A \subseteq X$. Also let $b \in X$. Then $b \in A'$ if and only if there is a sequence $\{a_n\}_n \subseteq A$ of distinct terms such that $a_n \to b$.

Proof:

Only if part: Let $b \in A'$. Then

$$\forall \epsilon > 0 \quad N'(b, \epsilon) \cap A \neq \phi.$$

We take $\epsilon_1 = 1$, and pick any $a_1 \in N'(b, \epsilon_1) \cap A$.

Then we take $\epsilon_2 = \min\left\{\frac{1}{2}, d(b, a_1)\right\} > 0$, and pick any $a_1 \in N'(b, \epsilon_2) \cap A$.

Continuing thus, we get a sequence $\{a_n\}_n \subseteq A$ with distinct terms with $a_n \to b$.

If part: Let $\{a_n\}_n \subseteq A$ be a sequence with distinct terms such that $a_n \to b$.

Shall show $b \in A'$, ie,

$$\forall \epsilon > 0 \quad N'(b, \epsilon) \cap A \neq \phi.$$

$\forall\epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

Then $\exists M \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq M \quad a_n \in N(b, \epsilon)$.

Since a_n's are all distinct, hence $\exists n \geq M \quad a_n \neq b$.

So $a_n \in N'(b, \epsilon) \cap A$.

Thus $N'(b, \epsilon) \cap A \neq \phi$, as required.

[Q.E.D]

THEOREM

Let (X, d) be a metric space and let $A \subseteq X$. Also let $b \in X$. Then $b \in \overline{A}$ if and only if there is a sequence $\{a_n\}_n \subseteq A$ such that $a_n \to b$.

Proof:

Only if part: Let $b \in \overline{A}$. Then either $b \in A$ or $b \in A'$.

If $b \in A$, then we can take $a_n \equiv b$.

If $b \in A'$, then the last theorem gives us a sequence $\{a_n\}_n \subseteq A$ with $a_n \to b$.

If part: Let $\{a_n\}_n \subseteq A$ converge to b.

Let $b \notin A$. Shall show $b \in A'$, ie,

$\forall \epsilon > 0 \quad N'(b, \epsilon) \cap A \neq \phi$.

$\forall\epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

Then $\exists M \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq M \quad a_n \in N(b, \epsilon)$.

Since $b \notin A$ and $a_M \in A$, hence $a_M \in N'(b, \epsilon) \cap A$.

Thus, $N'(b, \epsilon) \cap A \neq \phi$, as required.

[Q.E.D]

Example 7: Show that for any subset A of a metric space we have $\text{diam}(\overline{A}) = \text{diam}(A)$.

SOLUTION:

$\because A \subseteq \overline{A}$, $\therefore \text{diam}(A) \leq \text{diam}(\overline{A})$.

Let, if possible, $\text{diam}(A) < \text{diam}(\overline{A})$.

We must have $x, y \in \overline{A}$ such that $d(x, y) > \text{diam}(A)$.

Since $x, y \in \overline{A}$, hence by the last theorem, there are $\{x_n\}_n, \{y_n\}_n \subseteq A$ such that $x_n \to x$ and $y_n \to y$.

Then $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$.

But $\forall n \in \mathbb{N} \quad d(x_n, y_n) \leq \text{diam}(A)$ and $d(x, y) > \text{diam}(A) (\Rightarrow\Leftarrow)$.

■

DAY 14
Cauchy sequence

এই অধ্যায়ের গোড়াতেই বলেছি যে real analysis-এ completeness axiom বা supremum axiom একটা গুরুত্বপূর্ণ জিনিস। আমরা সেখানে completeness axiom লিখে থাকি supremum ব্যবহার করে, এবং তার জন্য $\mathbb{R}$-এর সদস্যদের $\leq$ দিয়ে তুলনা করার প্রয়োজন হয়, যেটা সব metric space-এ নাও সম্ভব হতে পারে। কিন্তু তাও আমরা metric space-এর বেলাতেও completeness নিয়ে আলোচনা করতে পারি একটা কৌশল করে। সেটাই এবার শিখব।
Real analysis শেখার সময়ে আমরা **Cauchy sequence** বলে একটা জিনিস শিখি--

DEFINITION: Cauchy sequence

A sequence $\{a_n\}_n \in \mathbb{R}$ is called a **Cauchy sequence** if

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N \quad |a_n - a_m| < \epsilon.$$

আমাদের বাংলায়-বোঝানো-ইংরাজী-বই সিরিজের Real Analysis-এ বলেছিলাম যে Cauchy sequence-রা যেন আরব্য রজনীর জিনের মত, এমনিতে বিশাল বড় অথচ যত ছোটো একটা নস্যির কৌটোই দাও না, তার মধ্যে প্রায় পুরোটাই এঁটে যেতে পারে! Cauchy sequence-রাও তেমনি আসলে infinite sequence, তাই অসংখ্য term নিয়ে তৈরী, অথচ যাই $\epsilon > 0$ দেবে অমনি দেখবে একটা পর্যায় N-এর পর থেকে সবগুলো term-ই পরস্পরের থেকে $< \epsilon$ দূরত্বের মধ্যে গাদাগাদি করে রয়েছে।
আরব্য রজনীর গল্পে জিনেরা যেমন বেজায় ক্ষমতাশালী হত, তেমনি real analysis-এর গল্পে Cauchy sequence-দের ক্ষমতাও সাংঘাতিক, এবং তার মূলে রয়েছে এই theorem-টা--

THEOREM

A sequence in $\mathbb{R}$ is convergent if and only if it is a Cauchy sequence.

এটা প্রমাণ করা হত এই axiom-টা ব্যবহার করে--

Completeness axiom

Every non-empty, bounded above subset of $\mathbb{R}$ must have supremum in $\mathbb{R}$.

এই axiom-টাকে ধরে নিয়ে theorem-টাকে প্রমাণ করা যায়। সেটা আমরা real analysis-এই শিখে থাকি। মজার কথা হচ্ছে এর উল্টোটাও সত্যি--theorem-টাকে যদি axiom বলে ধরে নিই, তবে axiom-টাকে theorem হিসেবে প্রমাণ করা যাবে। এটা সাধারণতঃ real analysis শেখার সময়ে বলা হয় না। চট্ করে দেখে নিই এই উল্টো দিকটা কী করে হয়--

- আমরা এখন theorem-টাকে ঠিক বলে ধরে নিচ্ছি, মানে ধরে নিচ্ছি যে, $\mathbb{R}$-এর মধ্যে যে কোনো Cauchy sequence-ই converge করে।
- তা থেকে দেখাব, $A \subseteq \mathbb{R}$ যদি nonempty এবং bounded above হয়, তবে $\mathbb{R}$-এর মধ্যে A-র supremum থাকবে।

এরকম একটা যেকোনো A নিয়ে শুরু করা যাক। আমরা কায়দা করে দুটো Cauchy sequence বানাব, যারা সাঁড়াশীর মত দুদিক থেকে এসে একই সংখ্যাতে converge করবে, এবং দেখা যাবে যে এই সংখ্যাটাই হল A-র supremum! কীভাবে এই কাণ্ডটা করব, সেটা ছবি দিয়ে বুঝতে সুবিধা হবে। Fig 9 দ্যাখো। এখানে আঁকার সুবিধার জন্য $\mathbb{R}$-কে খাড়া একটা লাইন হিসেবে দেখিয়েছি। ওর মধ্যে মোটা অংশটা ধরো A. ছবি দেখেই বুঝতে পারছ যে ওর supremum হল ℓ. ওই ℓ-এর অবস্থানই আমরা সাঁড়াশী আক্রমণ দিয়ে খুঁজে বার করব--

- বলে দিয়েছে যে $A \neq \phi$. সুতরাং একটা কোনো $a_0 \in A$ পাব। বুঝতেই পারছ supremum-টা $\geq a_0$ হবেই।

Fig 9

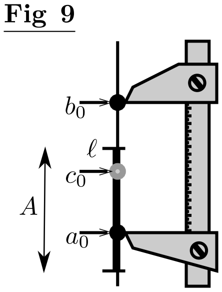


Fig 10

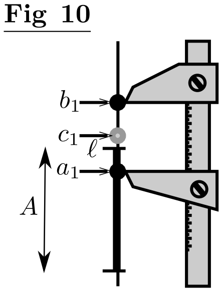
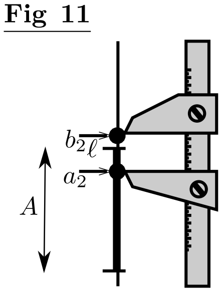


Fig 11



- আরও বলেছে যে A-টা bounded above. সুতরাং একটা কিছু upper bound পাব, ধরো b_0. বুঝতেই পারছ যে supremum-টা অবশ্যই $\leq b_0$-ও হবে।

সুতরাং supremum-টা (যার অবস্থান আমরা বার করতে চাইছি) $[a_0, b_0]$-এর মধ্যেই থাকতে বাধ্য। এইটাই হল সাঁড়াশীর প্রথম অবস্থা (Fig 9)।
এবার এদের ঠিক মাঝখানের সংখ্যাটা মানে $c_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$-এর দিকে তাকাও। এটা কি A-র একটা upper bound? Fig 9-এর বেলায় উত্তর হল--না। সুতরাং supremum-টা পড়েছে উপরের অর্ধেকে, অর্থাৎ $[c_0, b_0]$-এর মধ্যে। সুতরাং সাঁড়াশীটা এবার নীচের অর্ধেকটাকে বাদ দিয়ে খালি উপরের অর্ধেকের উপর চেপে এল (Fig 10). ধরো এই নতুন অবস্থানটাকে বললাম $[a_1, b_1]$. মানে আমাদের উদাহরণে $a_1 = c_0$ আর $b_1 = b_0$, অর্থাৎ সাঁড়াশীর উপরের চোয়াল যথাস্থানে রইল, নীচের চোয়ালটা খানিকটা উঠল।
আবার একে সমান দুইভাগে ভাগ করি। এবার ঠিক মাঝের বিন্দুটা A-র একটা upper bound. তার মানে supremum-টা পড়বে নীচের অর্ধেকে। অতএব সাঁড়াশীটা আরো চেপে এসে $[a_2, b_2]$ অবস্থানে এল (Fig 11)। একই কাজ বার বার করে গেলে সাঁড়াশীটা আরো আরো বেশী করে চেপে আনা যাবে। সুতরাং এইভাবে আমরা পাব

$$a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq b_1 \leq b_0.$$

ব্যাপারটা ভালো করে বুঝে নাও, প্রতি ধাপেই সাঁড়াশীর ফাঁকটা আগের বারের অর্ধেক হয়ে যাচ্ছে, কখনো উপরের অর্ধেক, কখনো বা নীচের অর্ধেক। যেহেতু ফাঁকটা এইভাবে অর্ধেক হতে হতে সাঁড়াশীর দুইপাশ ক্রমশঃ পরস্পরের সাথে মিশে আসছে, তাই $b_n - a_n \to 0$. এবার লক্ষ কর যে $\{a_n\}_n$ এবং $\{b_n\}_n$ দুজনেই হল Cauchy sequence. কেন? কারণ--

> ধরো যেকোনো $\epsilon > 0$ নিলে। তবে একটা $N \in \mathbb{N}$ পাবে যাতে $b_N - a_N < \epsilon$ হয় (মানে সাঁড়াশীর ফাঁকটা $< \epsilon$ হয়)। এবার তুমি যাই $m, n \geq N$ নাও না কেন, a_m, a_n, b_m, b_n সবাই তো ওই সাঁড়াশীর ফাঁকটুকুর মধ্যে রয়েছে। সুতরাং $|a_m - a_n| < \epsilon$ এবং $|b_m - b_n| < \epsilon$ হতে বাধ্য।

এদিকে আমরা ধরে নিয়েছিলাম যে $\mathbb{R}$-এর মধ্যে Cauchy sequence মাত্রেই converge করে। সুতরাং $\{a_n\}_n$ এবং $\{b_n\}_n$ দুজনেই converge করতে বাধ্য। আর যেহেতু $b_n - a_n \to 0$, তাই ওরা একই সংখ্যায় converge করবে। ধরো এই limit-টার নাম দিলাম ℓ. যেহেতু b_n-রা সবাই A-র upper bound, আর $b_n \to \ell$, তাই একটু চিন্তা করলেই বুঝবে যে ℓ-টাও A-র একটা upper bound না হয়ে যায় না। আবার যেহেতু a_n-রা সবাই A-র মধ্যে আছে, এবং $a_n \to \ell$, তাই ℓ-এর থেকে ছোটো কোনো সংখ্যা A-র upper bound হতে পারে না। সুতরাং ℓ হল A-র সবচেয়ে ছোটো upper bound, মানে supremum, যার হদিশ বার করাই আমাদের উদ্দেশ্য ছিল!
তার মানে আমরা শিখলাম যে supremum-এর অস্তিত্ব এবং Cauchy sequence-এর convergence, এই দুটো জিনিসই সমান শক্তিশালী। এর মধ্যে যেকোনো একটাকে ধরে নিয়ে অন্যটা প্রমাণ করা যায়। এদের মধ্যে দ্বিতীয়টার একটা বাড়তি সুবিধা আছে--এতে কোনো supremum বা $\leq$ দিয়ে দুটো সংখ্যাকে তুলনা করার গল্প নেই। তাই দ্বিতীয় শর্তটা যেকোনো metric space-এর ক্ষেত্রেই পরীক্ষা করে দেখা যায়। সাবধান, সব metric space-এই সব Cauchy sequence-রা converge করে এমন কিন্তু বলছি না। আমি খালি এটাই বলছি যে, যেকোনো metric space-এর ক্ষেত্রেই শর্তটা অন্ততঃ লেখা যাবে। যাদের ক্ষেত্রে শর্তটা খাটবে, তাদেরকে আমরা বলব **complete metric space**. এই হল মূল ধারণাটা। এবার পুরোটা গুছিয়ে লিখে ফেলি। প্রথমে লিখে নিই কোনো metric space-এর মধ্যে Cauchy sequence কাকে বলে। সংজ্ঞাটা একেবারেই real analysis-এ যেমন ছিল সেরকমই।

Example 8: Define a Cauchy sequence in a metric space (X, d).[1] **(2006)**

SOLUTION:

|

DEFINITION: Cauchy sequence

Let (X,d) be a metric space. Then $\{a_n\}_n \subseteq X$ is called a **Cauchy sequence** if

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m,n \geq N \quad d(a_m, a_n) < \epsilon.$$

সুতরাং সহজ ভাষায় বলা যায় যে Cauchy sequence হল এমন একটা sequence যেটা যত খুশী ছোটো জায়গার মধ্যেই প্রায় পুরো এঁটে যাবে। "প্রায়" বলার কারণ হল গোড়ার finite-সংখ্যক কিছু term (মানে $a_1, ..., a_{N-1}$) এই ছোটো জায়গাটার বাইরে থেকে যেতে পারে। ■

আমরা জানি যে real analysis-এর ক্ষেত্রে একটা sequence-এর পক্ষে Cauchy হওয়া আর convergent হওয়া সমার্থক, মানে--

($\mathbb{R}$, Euclidean)-এর ক্ষেত্রে convergent $\iff$ Cauchy.

এর একটা দিক যেকোনো metric space-এর ক্ষেত্রেই ঠিক--

যেকোনো (X,d)-এর ক্ষেত্রেই convergent $\implies$ Cauchy.

কিন্তু উল্টোদিকটা সব metric space-এ ঠিক নাও হতে পারে--

এমন (X,d) আছে, যেখানে convergent $\not\Longleftarrow$ Cauchy.

এই নিয়েই এবারের অংকটা।

Example 9: Prove that a convergent sequence $\{x_n\}_n$ in (X,d) is a Cauchy sequence. Give an example to show that a Cauchy sequence need not be convergent in an arbitrary metric space.[5] **(2006)**

SOLUTION:

First part: Let $\{x_n\}_n \subseteq X$ and $x \in X$ be such that $x_n \to x$.

Shall show that $\{x_n\}_n$ is a Cauchy sequence, ie,

◎ $\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m,n \geq N \quad d(x_m, x_n) < \epsilon.$

$\forall \epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

যেহেতু x_n-রা x-এর খুব কাছে যাচ্ছে, তাই x_n-রা পরস্পরের খুব কাছে যেতেও বাধ্য। সেটাই দেখাব triangle inequality দিয়ে--

$$\because x_n \to x, \ \therefore \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad d(x_n, x) < \tfrac{\epsilon}{2}.$$

এখানে $\frac{\epsilon}{2}$ কেন এল বুঝে নাও--যদি তুমি শ্যামবাজারের থেকে 1 মাইলের মধ্যে থাকো, আর আমিও তাই থাকি, তবে আমাদের মধ্যেকার দূরত্ব $1+1=2$ মাইলের মধ্যে হতে বাধ্য। দুখানা 1 যোগ হল, কারণ আমরা হয়তো শ্যামবাজারের দুই বিপরীত দিকে রয়েছি। একইভাবে যদি আমরা নিজেদের মধ্যে দূরত্ব $< \epsilon$ রাখতে চাই, তবে সেটা গ্যারান্টি করার একটা পথ হল দুজনেই একই জায়গা থেকে $< \frac{\epsilon}{2}$ দূরত্বে থাকা।

$\boxed{\exists N}$ Choose this $N \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\forall m, n}$ Take any $m, n \geq N$.

Then

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x) + d(x, x_n) \quad [\text{ by } \Delta\text{-inequality}] \\ &< \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon, \end{aligned}$$

as required.

এবার একটা counterexample বানানোর পালা। এর জন্য যা খুশী একটা convergent sequence নাও $x_n \to \ell$. খালি লক্ষ রেখো যেন x_n-গুলো ℓ-এর সমান হয়ে না যায়। এবার এমন ভাবে X নাও যাতে x_n-রা সবাই X-এর মধ্যে পড়ে, কিন্তু ℓ-টা X-এর বাইরে থাকে। যেমন আমরা $x_n = \frac{1}{n} \to 0 = \ell$ নিয়ে কাজ করব--

Second part: Counterexample:

Let $X = (0, 1]$ with metric $d(x, y) = |x - y|$.

Let $x_n = \frac{1}{n}$ for $n \in \mathbb{N}$.

We know that $x_n \to 0$ in $(\mathbb{R}, d)$, and so is a Cauchy sequence.

But $\because 0 \notin X$,

$\therefore \{x_n\}_n$ is not convergent in (X, d).

এখানে $X = (0, \infty)$ বা $(0, 3)$ বা $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ নিলেও চলত। ■

এবার তাহলে নীচের অংকের উত্তরে গুরুত্বপূর্ণ সংজ্ঞাটা লিখেই ফেলি--

Example 10: Define a complete metric space.[1] **(2006,2009)**

SOLUTION:

> **DEFINITION: Complete metric space**
>
> A metric space (X, d) is called complete if all Cauchy sequences converge in it.

■

দুটো উদাহরণ দেখলে বুঝতে সুবিধা হবে।

Example 11: Give an example of a complete metric space and an incomplete metric space.[3] **(2006.12b (part 2))**

SOLUTION:

(ℝ,Euclidean) is a complete metric space. This is a standard result from real analysis.

But $(0,\infty)$ is an incomplete metric space under the same metric.

⟦ Because:

$\{\frac{1}{n}\}_n$ is a Cauchy sequence in $(0,\infty)$, but its does not converge in $(0,\infty)$.

⟧

■

এই অংকটা থেকেই বুঝতে পারছ যে (ℝ,Euclidean)-এর কোনো subspace একটা complete metric space হবে কিনা সেটা আন্দাজ করার একটা কায়দা হল subspace-টার মধ্যে এমন কোনো sequence তৈরী করা যেটা subspace-টার বাইরে কোথাও গিয়ে converge করে। যদি এরকম একটাও sequence পাও, তবে subspace-টা complete হবে না। কিন্তু যদি এরকম কোনো sequence না থাকে, তবে subspace-টা complete হতে বাধ্য। এই ব্যাপারটা মাথায় রেখে নীচের অংকটা কর।

Exercise 7: নীচে (ℝ,Euclidean)-এর কয়েকটা subspace দিয়েছি। এদের মধ্যে কারা কারা complete বল। (*i*) $(1,2)$, (*ii*) $[1,2]$, (*iii*) $\mathbb{N}$, (*iv*) $\mathbb{Q}$, (*v*) $\mathbb{R}\setminus(0,1)$. ■

এইবার ঠাণ্ডা মাথায় চিন্তা করলেই নীচের অংকটা করতে পারবে। প্রমাণটা ছোট্টো!

Exercise 8: Let (X,d) be a metric space, where $X\subseteq\mathbb{R}$ and d is the Euclidean metric. Show that it is complete if and only if X is closed in $\mathbb{R}$. ■

14.1 Cauchy sequence-এর বিভিন্ন বৈশিষ্ট্য

আমরা দেখলাম যে Cauchy sequence-রা converge নাও করতে পারে। কিন্তু নীচের অংকটা বলছে যে Cauchy sequence-রা converge করুক বা নাই করুক, bounded অন্ততঃ হবেই।

Example 12: Show that every Cauchy sequence in a metric space is bounded, but the converse is not true.[3] **(2012.11dii)**

SOLUTION:

<u>First part:</u> Let (X,d) be any metric space. Let $\{a_n\}_n$ be any Cauchy sequence in (X,d). Shall show $\{a_n\}_n$ is bounded, ie,

◎ $\exists a\in X \quad \exists R>0 \quad \{a_k\}_k\in N(a,R)$.

আমরা জানি যে একটা Cauchy sequence-কে যত খুশী ছোটো জায়গার মধ্যে প্রায় এঁটে ফেলা যায় (খালি গোড়ার দিকের কয়েকটা term হয়তো বাইরে থাকবে)। Fig 12-এ আমরা sequence-টার প্রায় সব term-কেই একটা ছোটো ball-এর মধ্যে আটকে দিয়েছি। ধরো ball-টার diameter হল 1.

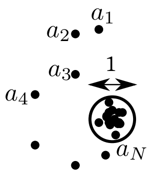


Fig 12

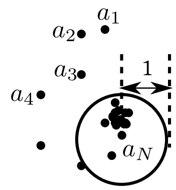


Fig 13

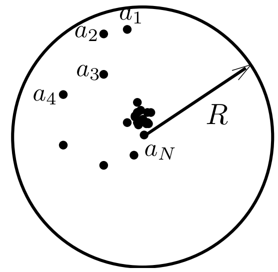


Fig 14

$\because \{a_n\}_n$ is Cauchy,

$$\therefore \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N \quad d(a_m, a_n) < 1.$$

কিন্তু bounded দেখানোর জন্য পুরো sequence-টাকেই একটা ball-এর মধ্যে ঢোকাতে হবে, গোড়ার কয়েকটা term বাইরে থাকলে চলবে না। সুতরাং ball-টা একটু বড় নেব, যাতে ওই গোড়ার term কয়টাও ঢুকে পড়ে। প্রথমে ball-টার কেন্দ্র কী নেব ঠিক করে নিই।

$\boxed{\exists a}$ Choose $a = a_N \in X$.

এইটাকেই কেন্দ্র নেব। লক্ষ কর যে $N(a, 1)$-এর মধ্যে প্রায় পুরো sequence-টাই আছে (Fig 13)। এইবার radius-টাকে এমনভাবে নেব, যাতে গোড়ার term কয়টাও ভিতরে চলে আসে, Fig 14-এর মত।

$\boxed{\exists R}$ Choose $R = \max\{d(a, a_1), ..., d(a, a_{N-1}), 1\} + 1 > 0$.

এখানে R-এর ফর্মুলার শেষে $+1$-টা রেখেছি, যাতে $a_1, ..., a_{N-1}$-রা সবাই $N(a, r)$-এর ভিতরে থাকে, boundary-র গায়েই আটকে না থাকে।

$\boxed{\forall k}$ Take any $k \in \mathbb{N}$.

যদি $k \geq N$ হয়, তবে Fig 13-এর ছোটো neighbourhood-এই কাজ হয়ে যাবে--

If $k \geq N$, then $d(a, a_k) < 1 \leq R$, and so $a_k \in N(a, R)$, as required.

যদি $k < N$ হয়, তবে Fig 14-এর বড় neighbourhood-টা লাগবে--

If $k < N$, then $d(a, a_k) < R$, and so $a_k \in N(a, R)$, as required.

এবার উল্টো দিকটা। আমাদের কাজ করতে বলেছে converse-টা নিয়ে, সেটা প্রথমেই লিখে দেওয়া ভালো।

Second part: The converse statement is

> ``Every bounded sequence in a metric space is a Cauchy sequence.''

This statement is false.

Counterexample: The sequence $\{(-1)^n\}_n$ is a bounded sequence in the metric space $(\mathbb{R}, d)$, where d is the usual metric. But it is not a Cauchy

sequence, because $\forall n \in \mathbb{N} \quad d(a_n, a_{n+1}) = 1 \not\to 0$.

কারণ যদি পরপর দুটো term-এর মধ্যে দূরত্ব সর্বদা 1 হয়, তবে কোনোভাবেই sequence-টার প্রায় পুরোটা যতখুশী ছোটো জায়গায় এঁটে ফেলা সম্ভব নয়! ■

Example 13: Let $\{p_n\}$ and $\{q_n\}$ be Cauchy sequences in a complete metric space (X, d). Show that the sequence $\{d(p_n, q_n)\}$ converges in the metric space $(\mathbb{R}, u)$ where u denotes the usual metric on $\mathbb{R}$.[3] **(2009.11eii)**

SOLUTION: একটা complete metric space-এর মধ্যে Cauchy sequence মানেই convergent. সুতরাং এই অংকের শর্ত অনুযায়ী $\{p_n\}_n$ এবং $\{q_n\}_n$ দুজনেই convergent হচ্ছে। অতএব অংকটা পরিণত হচ্ছে Example 4-এ, যেটা আমরা আগেই করেছি (91 নম্বর পাতার কাছাকাছি কোথাও)। কিন্তু এই অংকে একটা বাড়তি মজা আছে। যদি তুমি completeness শর্তটা বাদও দাও, তাও অংকটা দিব্যি করা যাবে! আমরা সেভাবেই করব--

Let $d_n = d(p_n, q_n)$.

To show

◎ $\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N \quad |d_m - d_n| < \epsilon$.

$\boxed{\forall\epsilon}$ Take any $\epsilon > 0$.

এবার কী করব, সেটা Fig 15 দেখলে বুঝতে সুবিধা হবে। যদি p_m আর p_n খুব কাছাকাছি থাকে, আর q_m এবং q_n-ও নিজেদের মধ্যে কাছাকাছি থাকে, তবে $d(p_m, q_m)$ আর $d(p_n, q_n)$-এর মধ্যেও বেশী তফাৎ থাকতে পারে না।

$\because \{p_n\}_n$ is Cauchy,

$$\therefore \exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N_1 \quad d(p_m, p_n) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Similarly, $\because \{q_n\}_n$ is Cauchy,

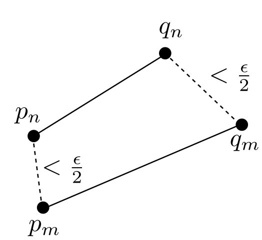
$$\therefore \exists N_2 \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N_2 \quad d(q_m, q_n) < \frac{\epsilon}{2}.$$

$\boxed{\exists N}$ Choose $N = \max\{N_1, N_2\} \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\forall m, n}$ Take any $m, n \geq N$.

এবার আমরা দেখাব $|d_m - d_n| < \epsilon$. এর জন্য আলাদা করে দেখাব $d_m - d_n < \epsilon$ আর $d_n - d_m < \epsilon$.

Fig 15



By Δ-inequality,

$$d(p_m, q_m) \leq d(p_m, p_n) + d(p_n, q_n) + d(q_n, q_m) < d(p_n, q_n) + \epsilon.$$

So

$$d_m - d_n < \epsilon.$$

অন্যদিকটাও একইভাবে হবে--

Again,

$$d(p_n, q_n) \leq d(p_n, p_m) + d(p_m, q_m) + d(q_m, q_n) < d(p_m, q_m) + \epsilon.$$

So

$$d_n - d_m < \epsilon.$$

দুদিক মিলিয়ে--

So $|d_m - d_n| < \epsilon$, as required.

■

লক্ষ করলে completeness কোথাও লাগল না?

Example 14: If $\{x_n\}_n$ is a Cauchy sequence in a metric space (X, d), show that

$$\lim d(x_n, x_{n+1}) = 0.$$

Is the converse of the result true? Justify your answer.[4] **(2007.11c)**

SOLUTION:

First part: Shall show $\lim d(x_n, x_{n+1}) = 0$, ie,

$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \qquad d(x_n, x_{n+1}) < \epsilon.$

$\boxed{\forall \epsilon}$ Take any $\epsilon > 0$.

$\because \{x_n\}_n$ is Cauchy,

$$\therefore \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N \quad d(x_m, x_n) < \epsilon. \qquad (*)$$

$\boxed{\exists N}$ Choose this $N \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\forall n}$ Take any $n \geq N$.

Let $m = n + 1$.

Then $m, n \geq N$, and so by (*), $d(x_m, x_n) < \epsilon$, or $d(x_n, x_{n+1}) < \epsilon$, as required.

দ্বিতীয় অংশে converse-টা নিয়ে কাজ করতে হবে। সব সময়ে বুদ্ধিমানের কাজ হল converse-টাকে আগে গুছিয়ে লিখে নেওয়া।

> Second part: The converse statement is:
>
> "If $\{x_n\}_n$ is a sequence in a metric space (X, d) such that $d(x_n, x_{n+1}) \to 0$, then $\{x_n\}_n$ must be a Cauchy sequence."
>
> This is false.
>
> Counterexample:
>
> Let $X = \mathbb{R}$ and $d(x, y) = |x - y|$.
>
> Let
> $$x_n = \sum_1^n \frac{1}{k}.$$
> Then
> $$d(x_n, x_{n+1}) = |x_{n+1} - x_n| = \left|\sum_1^{n+1} \tfrac{1}{k} - \sum_1^{n} \tfrac{1}{k}\right| = \tfrac{1}{n+1} \to 0.$$
> But we know that $\sum_1^\infty \frac{1}{k} = \infty$, and so $\{x_n\}_n$ does not converge in $\mathbb{R}$.
>
> Since $(\mathbb{R}, d)$ is complete, $\{x_n\}_n$ is not Cauchy.

■

Example 15: A Cauchy sequence in a metric space (X, d) is convergent if it has a convergent subsequence. Correct or justify the statement.[3] **(2013.5ei)**

SOLUTION: প্রথমে চিন্তা করে দেখি কথাটা ঠিক নাকি ভুল। Cauchy sequence মানে term-গুলো ক্রমশঃই পরস্পরের কাছাকাছি গাদা হয়ে উঠছে। এবার যদি একটাও subsequence থাকে, যেটা কোনো ℓ-এ converge করছে, তবে সেই subsequence-এর term-গুলো সবাই গিয়ে ℓ-এর গায় ভীড় করবে। পুরো sequence-টাই একটা Cauchy sequence হওয়ায় বাকি term-গুলোও দূরে সরে থাকতে পারবে না, ওরাও ওই ℓ-এর গায়েই গিয়ে ভীড় করতে বাধ্য, মানে পুরো sequence-টাই ℓ-এ converge করবে। তার মানে--

> The statement is correct.

এবার প্রমাণ করব। প্রথমে সব কিছুর নাম দিয়ে নিই--

> Let $\{x_n\}_n$ be a Cauchy sequence in a metric space with a convergent subsequence $\{x_{n_k}\}_k$ such that $x_{n_k} \to \ell \in X$.
>
> Shall show that $x_n \to \ell$, ie,
>
> $\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad d(\ell, x_n) < \epsilon.$
>
> $\forall\epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

এবার একটা সুবিধামত N নিতে হবে। ব্যাপারটা অনেকটা উঁচু বাড়িতে কয়েকজন চোর মিলে চুরি করার মত। এদের মধ্যে একজন থাকে, যে বেয়ে বেয়ে উঠতে খুব দক্ষ। প্রথমে সে রাতের অন্ধকারে চুপিচুপি উঠে যায়, তারপর উপর থেকে দড়ি ফেলে বাকিদের তুলে নেয়। তা, আমাদের অংকে subsequence-টা হল সেই দক্ষ চোরের উঠে যাওয়া। বলা আছে ওটা ℓ-এ converge করে, তাই প্রথমে subsequence-টা ধরে আমরা ℓ-এর খুব কাছে পৌঁছব। মূল sequence-টা একটা Cauchy

sequence, এই শর্তটা হল আমাদের দড়ি। যেই subsequence-এর একটা কোনো term চুপিচুপি ℓ-এর কাছে পৌঁছে যাবে, অমনি সে Cauchy condition-এর দড়ি ফেলে মূল sequence-এর term-গুলোকেও কাছে টেনে নেবে।
প্রথম ধাপে তাহলে subsequence বরাবর এগোই--

$\because x_{n_k} \to \ell$

$$\therefore \exists K \in \mathbb{N} \quad \forall k \geq K \quad d(\ell, x_{n_k}) < \frac{\epsilon}{2}.$$

এবার Cauchy sequence ব্যবহার করে মূল sequence-এর term-গুলোকে টেনে আনতে হবে।

$\because \{x_n\}_n$ is Cauchy,

$$\therefore \exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N_1 \quad d(x_m, x_n) < \frac{\epsilon}{2}.$$

$\exists N$ Choose $N = \max\{N_1, n_K\}$.

ইচ্ছে করেই N-টা এমনভাবে নিলাম যাতে N_1 আর n_K দুজনের চেয়েই $\geq$ হয়। তাতে subsequence-এর term-ও ℓ-এর কাছে থাকবে, আর মূল sequence-এর term-ও subsequence-এর কাছে থাকবে।

$\forall n$ Take any $n \geq N$.

We pick some $n_k \geq n$. Then $k \geq K$, and hence $d(x_{n_k}, \ell) < \frac{\epsilon}{2}$.

এটাই হল সেই দক্ষ চোর।

Also $n, n_k \geq N_1$, and hence $d(x_n, x_{n_k}) < \frac{\epsilon}{2}$.

আর এই হল দড়ির টান। দুয়ে মিলে--

Hence

$$\begin{aligned} d(\ell, x_n) &\leq d(\ell, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_n) \\ &< \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon, \end{aligned}$$

as required.

■

DAY 15
কিছু উদাহরণ

15.1 Complete দেখানো

ধরো একটা metric space দিয়ে সেটাকে complete দেখাতে বলল। কী করে দেখাবে? তোমাকে যে কোনো একটা Cauchy sequence নিয়ে শুরু করে দেখাতে হবে যে সেটা metric space-টার ভিতরেই কোথাও একটা converge করে।

এটা যাবতীয় Cauchy sequence-এর জন্যই করা গেলে complete দেখানো হবে। ঠিক কী করে সেটা করা যাবে, সেটা বিভিন্ন ক্ষেত্রে বিভিন্নভাবে হবে। যেমন real analysis-এর বেলায় আমরা এই কাজটা করি supremum axiom কাজে লাগিয়ে। এবার আমরা আরো কয়েকটা উদাহরণ দেখব, যেখানে আমরা $\mathbb{R}$ যে complete সেই তথ্যটা কাজে লাগিয়ে অন্যান্য metric space-দের complete দেখাব।

Example 16: Prove that $(\mathbb{R}^n, d)$ is a complete metric space where

$$d(x,y) = \left[(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2\right]^{1/2}$$

for $x = (a_1, a_2, ..., a_n),\ y = (b_1, b_2, ..., b_n)$ in $\mathbb{R}^n$.[5] **(2013.5d)**
SOLUTION: এখানে metric-টা হল আমাদের অতি পরিচিত Euclidean metric. আমরা জানি যে $\mathbb{R}$-এর উপরে Euclidean metric-টা হল complete. এই তথ্যটাই এখানে ব্যবহার করব।

> For $n = 1$, this is a standard result of real analysis.
> We shall prove for $n \geq 2$.

এর জন্য $\mathbb{R}^n$-এর Euclidean metric-এর সঙ্গে $\mathbb{R}$-এর Euclidean metric-এর সম্পর্ক নিয়ে দুটো তথ্য জানা থাকলে সুবিধা হবে।
প্রথম তথ্য-- ধরো $\mathbb{R}^n$-এর মধ্যে দুটো point নিলাম $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n), \beta = (\beta_1, ..., \beta_n)$. তবে যে কোনো i-এর জন্যই

$$\begin{aligned}
|\alpha_i - \beta_i| &= \left[(\alpha_i - \beta_i)^2\right]^{1/2} \\
&\leq \left[(\alpha_1 - \beta_1)^2 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)^2\right]^{1/2} \\
&= d(\alpha, \beta).
\end{aligned}$$

তার মানে α_i এবং β_i-এর মধ্যে দূরত্ব সব সময়ে α এবং β-র দূরত্বের চেয়ে $\leq$ হবে। এর একটা উল্টো দিকও আছে। সেটাই হল দ্বিতীয় তথ্য--
মনে করো সবগুলো $|\alpha_i - \beta_i|$-ই $< \epsilon$ হল। তাহলে $d(\alpha, \beta) < \sqrt{n}\epsilon$ হবে, কারণ--

$$d(\alpha, \beta) = \left[(\alpha_1 - \beta_1)^2 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)^2\right]^{1/2} < [(\epsilon^2 + \cdots + \epsilon^2]^{1/2} = \sqrt{n}\epsilon.$$

এই দুটো জিনিসই এই অংকটা করতে কাজে লাগবে।

> Let $\{x_k\}_k$ be any Cauchy sequence in $(\mathbb{R}^n, d)$.
> Shall show $\{x_k\}_k$ converges in $(\mathbb{R}^n, d)$, ie,
>
> ◎ $\exists \ell \in \mathbb{R}^n \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists K \in \mathbb{N} \quad \forall k \geq K \quad d(x_k, \ell) < \epsilon.$
> Let, for $k \in \mathbb{N}$,
> $$x_k = (a_{k1}, ..., a_{kn}).$$
> Then for each $i \in \{1, ..., n\}$, the sequence $\{a_{ki}\}_k$ is Cauchy in ($\mathbb{R}$,Euclidean).

⟦ <u>Because:</u>

$\because \{x_k\}_k$ is Cauchy in $(\mathbb{R}^n, d)$,

$$\therefore \forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N \quad d(x_m, x_n) < \epsilon.$$

But $|a_{mi} - a_{ni}| \leq d(x_m, x_n)$.
এইখানেই আমরা প্রথম তথ্যটা কাজে লাগালাম।
$\therefore \forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N \quad |a_{mi} - a_{ni}| < \epsilon$.

⟧

But ($\mathbb{R}$,Euclidean) is complete.

$\therefore \forall i \quad \{a_{ki}\}_k$ converges in $\mathbb{R}$.

$\therefore \exists \ell_i \in \mathbb{R} \quad a_{ki} \to \ell_i$ as $k \to \infty$.

এই ℓ_i-গুলোকে জুড়ে জুড়েই আমাদের $\ell \in \mathbb{R}^n$ বানাব--

$\boxed{\exists \ell}$ Choose $\ell = (\ell_1, ..., \ell_n) \in \mathbb{R}^n$.

$\boxed{\forall \epsilon}$ Take any $\epsilon > 0$.

এবার $d(x_k, \ell)$-কে ছোটো বানাতে হবে। এখানে দ্বিতীয় তথ্যটা কাজে লাগবে।

$\because \forall i \in \{1, ..., n\} \quad a_{ki} \to \ell_i$ as $k \to \infty$,

$$\therefore \forall i \in \{1, ..., n\} \quad \exists K_i \in \mathbb{N} \quad \forall k \geq K_i \quad |a_{ki} - \ell_i| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}.$$

এই জায়গাটা হয়তো বুঝতে সহজ হবে যদি Fig 16-এর sequence-টাকে উদাহরণ হিসেবে ভাবো। তাহলে K_1, K_2 কীভাবে নেব সেটা রয়েছে Fig 17 আর Fig 18-এ।

$\boxed{\exists K}$ Choose $K = \max\{K_1, ..., K_n\} \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\forall k}$ Take any $k \geq K$.

Fig 16

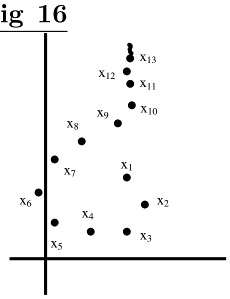


Fig 17

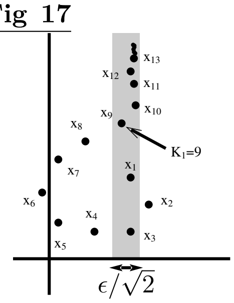
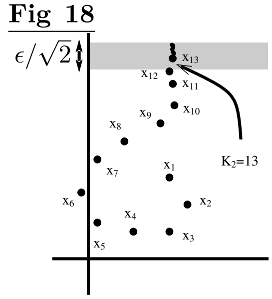


Fig 18



Then

$$\begin{aligned} d(x_k, \ell) &= \left[(a_{k1}-\ell_1)^2+\cdots+(a_{kn}-\ell_n)^2\right]^{1/2} \\ &< \left[\underbrace{\frac{\epsilon^2}{n}+\cdots+\frac{\epsilon^2}{n}}_{n \text{ times}}\right]^{1/2} \\ &= \epsilon, \end{aligned}$$

as required.

■

আমরা এখানে দেখালাম যে $(\mathbb{R}^n, d)$ হল একটা complete metric space, যেখানে $n \in \mathbb{N}$ এবং d হল L_2 metric. ঠিক একই কায়দা খাটে যেকোনো L_p metric-এর ক্ষেত্রেও ($p > 0$), এমন কি L_∞-র বেলাতেও। উপরের অংকটা বুঝে থাকলে সেগুলো প্রমাণ করা খুবই সহজ--

Exercise 9: Let d_p be the L_p metric on $\mathbb{R}^n$, for $p > 0$. Show that $(\mathbb{R}^n, d_p)$ is a complete metric space. Also let d_∞ denote the L_∞ metric. Show that $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ is a complete metric space. ■

নীচের অংকটার মূল ধারণাটাও একই।

Example 17: Show that $C[0,1]$, the set of all real-valued continuous functions over $[0,1]$, is complete with respect to the metric 'd' given by

$$d(f,g) = \max_{0\le t\le 1} |f(t)-g(t)|, \quad f,g \in C[0,1].$$

[5] **(2011.11e)**
SOLUTION: Complete দেখানো মানে দেখানো যে সব Cauchy sequence-ই converge করে metric space-টার মধ্যেই। যা খুশি একটা Cauchy sequence নিয়ে শুরু করা যাক।

Let $\{f_n\}_n \subseteq C[0,1]$ be a Cauchy sequence. Shall show that it converges in $C[0,1]$, ie,

$$\exists f \in C[0,1] \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \ge N \quad d(f_n, f) < \epsilon.$$

প্রথমেই $\exists f$ আছে, অতএব আমাদের প্রথম কাজ হল একটা উপযুক্ত $f \in C[0,1]$ তৈরী করা। তার জন্য আমরা আগে একটা $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ বানাব, এবং পরে দেখাব যে f-টা সত্যিই continuous হয়।

Then for each $t \in [a,b]$ the sequence $\{f_n(t)\}_n$ is a Cauchy sequence in $\mathbb{R}$.

⟦ Because:

$\because \{f_n\}_n$ is Cauchy in $(C[0,1], d)$,

$$\therefore \forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N \quad d(f_m, f_n) < \epsilon.$$

But for each $t \in [0,1]$ we have $|f_m(t) - f_n(t)| \leq d(f_m, f_n)$.

$$\therefore \forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N \quad |f_m(t) - f_n(t)| < \epsilon.$$

⟧

$\because$ ($\mathbb{R}$, Euclidean) is complete, $\therefore \forall t \in \mathbb{R}$ the sequence $\{f_n(t)\}_n$ converges in $\mathbb{R}$, ie,

$$\therefore \forall t \in [0,1] \quad \exists \ell_t \in \mathbb{R} \quad f_n(t) \to \ell_t.$$

এই ℓ_t-গুলোকে জুড়ে জুড়েই f-টা বানাব।

$\boxed{\exists f}$ Choose $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ as $f(t) = \ell_t$.

আমরা কিন্তু এখনও দেখাইনি যে $f \in C[0,1]$. যদি এখানে দেখাতে বসি যে f-টা continuous, তবে অনেক ঝকমারি। তার চেয়ে আমরা সামান্য বাঁকা পথ নেব। আমরা প্রথমে দেখাব f_n-গুলো f-এ uniformly converge করে। এবং সেটা দেখালেই f-এর continuity আপনেই পাকা আমটির মত আমাদের হাতে টুপ্ করে এসে পড়বে। কেন, সেটা আগে লিখে দিই--

Enough to show that $f_n \to f$ uniformly on $[0,1]$.

এইটা দেখানোই কেন যথেষ্ট সেটা বুঝে নিই। আমাদের দেখানোর কথা যে আমাদের $(C[0,1], d)$ metric space-এ $f_n \to f$ হয়, তার মানে--

- এক, $f \in C[0,1]$ দেখাতে হবে,
- এবং দুই, $d(f_n, f) \to 0$ দেখাতে হবে।

কিন্তু দ্বিতীয় জিনিসটা মানেই হল $f_n \to f$ uniformly on [0,1]. আর আমরা real analysis থেকে জানি যে continuous function-দের uniform limit সব সময়ে continuous হয়। সুতরাং এ থেকেই প্রথমটাও পেয়ে যাচ্ছি যে $f \in C[0,1]$.

⟦ Because:

$\because$ Uniform limit of continuous functions is continuous.
So $f \in C[0,1]$. Also uniform convergence is equivalent to convergence w.r.t. the metric d.

⟧

আমরা যেভাবে f-টা বানিয়েছি, তা থেকেই দেখা যাচ্ছে যে f_n-গুলো f-এ pointwise converge করে। আমাদের দেখাতে হবে uniform convergence. এবং সেটা দেখানোর জন্য আমাদের হাতে বাড়তি তথ্য আছে এই যে $\{f_n\}_n$ হল একটা Cauchy sequence. এটা মাথায় রেখে ধীরে ধীরে নীচের ধাপগুলো পড়।

অংকের ভাষায় uniform convergence মানে হল--

> $\therefore$ Shall show
>
> $$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \forall x \in [0,1] \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

এইটা আমরা contradiction দিয়ে প্রমাণ করব।

> Let, if possible, this be false. Then
>
> $$\exists \epsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq N \quad \exists x \in [0,1] \quad |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon. \qquad (*)$$

এটা কী করে পেলাম? যেটা দেখাতে হবে তার negation নিয়ে, মানে $\forall$-গুলোকে $\exists$, এবং $\exists$-গুলোকে $\forall$ করে দিয়ে। আর সবশেষের $<$-টা উল্টে হয়ে গেছে $\geq$.

> $\because \{f_n\}_n$ is Cauchy in $C[0,1]$,
>
> $$\therefore \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N \quad \forall x \in [0,1] \quad |f_m(x) - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

এইবার (*) কাজে লাগিয়ে এই N-এর জন্য একটা $n \geq N$ আর $x \in [0,1]$ পাব। এদের নাম দিই n_* আর x_*. বোঝার জন্য Fig 19 দ্যাখো।

> Then, by (*),
>
> $$\exists n_* \in \mathbb{N} \quad \exists x_* \in [0,1] \quad |f_{n_*}(x_*) - f(x_*)| \geq \epsilon.$$
>
> $\therefore \forall m \geq N$
>
> $$\begin{aligned} |f_m(x_*) - f(x_*)| &\geq |f_{n_*}(x_*) - f(x_*)| - |f_m(x_*) - f_{n_*}(x_*)| \\ &> \epsilon - \frac{\epsilon}{3} = \frac{2\epsilon}{3}. \end{aligned}$$

মানে m যতই বড় নাও না কেন $|f_m(x_*) - f(x_*)|$ সর্বদাই $> \frac{2\epsilon}{3}$ হয়ে বসে থাকবে (Fig 20)। সুতরাং--

> $\therefore f_m(x_*) \not\to f(x_*) (\Rightarrow\Leftarrow)$.
> This completes the proof.

■

এই সমাধানের কায়দাতেই নীচের theorem-টাও প্রমাণ করতে পারবে।

Fig 19

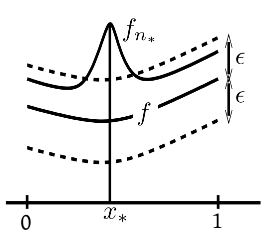
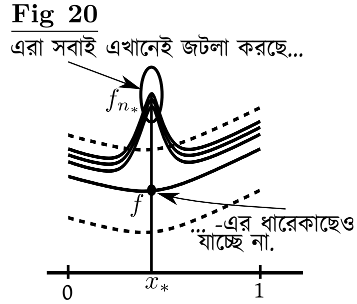


Fig 20



> **THEOREM**
>
> Let $[a,b]$ and $[c,d]$ be any two closed and bounded intervals in $(\mathbb{R}$, Euclidean$)$. Let $\mathcal{D}$ be the set of all continuous functions from $[a,b]$ to $[c,d]$. Then $\mathcal{D}$ is complete under the sup-metric.

Exercise 10: আগের অংকটার সমাধানের অনুকরণে এটা প্রমাণ করো দেখি।
HINT: ঘাবড়ে যেও না। কাজটা খুবই সহজ। খালি আগের সমাধানে $f \in C[0,1]$-এর জায়গায় এখানে $f \in \mathcal{D}$ দেখাতে হবে। যেহেতু $f_n(x)$-রা সবাই $[c,d]$-এর মধ্যে আছে, আর $[c,d]$ হল closed, তাই $f_n(x)$-এর limit হবার সুবাদে $f(x)$-ও $[c,d]$-র মধ্যেই থাকবে। ■

এবার একটা ছোট্টো অংক দিই যেটা খুব সহজ।

Exercise 11: ধরো (X,d) হল একটা discrete metric space. দেখাও যে এটা complete হতে বাধ্য। ■

15.2 Incomplete দেখানো

এতক্ষণ দেখলাম কোনো metric space-কে কী করে complete দেখাতে হয়। এবার ধরো কোনো metric space দিয়ে জানতে চাওয়া হল সেটা আদৌ complete কিনা, কিংবা দেখাতে বলল যে সেটা complete নয়। তবে কী করে এগোবে, সেটাই আলোচনা করব এবার।

Example 18: Does the set of all rational numbers form a complete metric space with respect to the usual metric? Justify your answer.[3] **(2009.11d (part 2))**
SOLUTION: আমাদের কাজ হল খুঁজে দেখা rational-দের এমন কোনো Cauchy sequence পাওয়া যায় কিনা, যেটা কোনো rational সংখ্যায় converge করে না। আমরা জানি, $\mathbb{R}$-এর মধ্যে সব Cauchy sequence-ই converge করে। তাই প্রশ্নটা দাঁড়াচ্ছে--এমন কোনো rational sequence আছে কিনা যেটা কোনো irrational সংখ্যাতে converge করে। অবশ্যই আছে। যেহেতু $\mathbb{R}$-এর মধ্যে $\mathbb{Q}$ হল dense, তাই যাই real সংখ্যা দাও না কেন, এমন একটা rational sequence পাবেই যেটা গিয়ে ঠিক সেই সংখ্যাতেই converge করে।

> No, the set of all rational numbers does not form a complete metric space with respect to the usual metric.
> Shall prove this by showing a Cauchy sequence $\{a_n\} \subseteq \mathbb{Q}$ that does not converge in $\mathbb{Q}$.

আমরা rational সংখ্যা দিয়ে তৈরী এমন একটা sequence নেব, যেটা কোনো irrational সংখ্যাতে converge করে। যেকোনো irrational সংখ্যা নিলেই চলবে, যেমন ধরো $\sqrt{2}$.

> By denseness of $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$,
>
> $$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists a_n \in \mathbb{Q} \quad a_n \in \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}+\frac{1}{n}\right).$$
>
> Consider the sequence $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{Q}$.
> $\because |a_n - \sqrt{2}| < \frac{1}{n} \to 0,$

$\therefore a_n \to \sqrt{2} \in \mathbb{R}$.

তার মানে $\mathbb{R}$-এর মধ্যে $\{a_n\}_n$ একটা convergent sequence.

$\because$ Every convergent sequence is a Cauchy sequence,

$\therefore \{a_n\}_n$ is a Cauchy sequence.

However, $\because \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$,

$\therefore \{a_n\}_n$ does not converge in $\mathbb{Q}$.

■

Example 19: Prove that the set $\mathbb{Q}$ of rational numbers is incomplete under the metric $d(x, y) = |x - y|$ for all $x, y \in \mathbb{Q}$.[2] **(2013.5eii)**

SOLUTION: আগের অংকটাই। ■

নীচের অংকটাও একই সুরের।

Example 20: Show that the sequence

$$\left\{1, \quad 1 + \tfrac{1}{1!}, \quad 1 + \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!}, \quad \cdots\right\}.$$

is a Cauchy sequence in $(\mathbb{Q}, d)$, where $(\mathbb{Q}, d)$, is the metric space of rational numbers under the usual metric.[2] **(2010.11di)**

SOLUTION: এটা খুবই সহজ অংক তোমার জন্য রেখে দিলাম। প্রথমে দেখিয়ে নাও যে sequence-টা $\mathbb{R}$-এর মধ্যে converge করে। (Limit-টা যে e সেটা নিশ্চয়ই বুঝতে পারছ)। Convergence-টা দেখানোর জন্য ratio test লাগালেই হবে। আমরা জানি যে $convergent sequence$ মাত্রেই Cauchy হয়।
অবশ্য চাইলে তুমি সরাসরি সংজ্ঞা থেকেও Cauchy sequence দেখাতে পারো। সেটাও কঠিন কিছু নয়। ■

আগেই বলেছি যে incomplete metric space বানানোর একটা উপায় হল যেকোনো metric space-এ যা খুশী একটা convergent sequence নেওয়া $x_n \to \ell$, যাতে $\forall n \quad x_n \neq \ell$ হয়। এবার যদি X-এর এমন যা খুশী subset নিই যার মধ্যে $\{x_n\}_n$ আছে কিন্তু ℓ নেই, তাহলেই সেটা একটা incomplete metric space হতে বাধ্য। যেমন ধরো $\mathbb{R}$-এর মধ্যে $\frac{1}{n} \to 0$ হয় (Euclidean metric নিয়ে কাজ করছি)। সুতরাং যদি আমরা $A = \left\{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$ নিই, তবে A একটা incomplete metric space হবে। A-র element-রা হল $\frac{1}{n}$-এর মত দেখতে। এদের একটা নাম দিই $a_n = \frac{1}{n}$. তাহলে A-র উপরে Euclidean metric-টা হবে

$$d(a_m, a_n) = |a_m - a_n| = \left|\tfrac{1}{m} - \tfrac{1}{n}\right|.$$

এই কথাটা মাথায় রেখে নীচের অংকটা পড়।

Example 21: Show that the metric space $(\mathbb{N}, d)$ is not a complete metric space where $\mathbb{N}$ is the set of natural numbers and

$$d(m, n) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

[3] **(2010.11dii)**

SOLUTION: এখানেও একই কায়দায় এগোব। একটা Cauchy sequence বার করব, যেটা metric space-টার মধ্যে converge করে না।

We consider the sequence $\{x_n\}_n \subseteq \mathbb{N}$ given by $x_n = n$.

Step 1: Shall show this is a Cauchy sequence, ie,

$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N \quad d(x_m, x_n) < \epsilon.$

$\forall\epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

By Archimedian property of $\mathbb{R}$,

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{N} < \frac{\epsilon}{2}.$$

$\exists N$ Choose this $N \in \mathbb{N}$.

$\forall m, n$ Take any $m, n \geq N$.

Then

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &= d(m, n) \\ &= \left|\tfrac{1}{m} - \tfrac{1}{n}\right| \\ &\leq \left|\tfrac{1}{m}\right| + \left|\tfrac{1}{n}\right| \\ &\leq \left|\tfrac{1}{N}\right| + \left|\tfrac{1}{N}\right| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \end{aligned}$$

as required.

এবার দেখাব যে $\{x_n\}_n$-টা Cauchy হলেও $(\mathbb{N}, d)$-র মধ্যে converge করে না।

Step 2: Shall show that $\{x_n\}_n$ does not converge in $(\mathbb{N}, d)$.

Let, if possible, $x_n \to \ell$ for some $\ell \in \mathbb{N}$.

Then $d(x_n, \ell) \to 0$, ie,

$$\left|\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{\ell}\right| \to 0.$$

But we know that $\frac{1}{n} \to 0$.

Hence $\frac{1}{\ell} = 0 (\Rightarrow\Leftarrow \because \forall \ell \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{\ell} > 0)$.

Combining steps 1 and 2, we conclude that $(\mathbb{N}, d)$ is not complete.

■

Exercise 12: Given that $(\mathbb{N}, d)$ is a metric space where $d(m,n) = \frac{|m-n|}{mn}$ for all $m, n \in \mathbb{N}$. Examine whether $(\mathbb{N}, d)$ is a complete metric space. [4] **(2007.12b)**

HINT:

আগের অংকটাই, কারণ $m, n \in \mathbb{N}$ হলে $\frac{|m-n|}{mn} = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|$. ■

Example 22: Let $P[0,1]$ be the set of all polynomials defined on $[0,1]$. Show that

$$d(P_1, P_2) = \sup_{0\le x\le 1} |P_1(x) - P_2(x)|$$

is a metric on $P[0,1]$. Also show that this metric space is incomplete.[5] **(2008.12a)**

SOLUTION: এই অংকের প্রথম অংশটা তোমার নিজেরই করতে পারা উচিত। আমরা প্রথম অধ্যায়ে দেখিয়েছিলাম যে $(C[0,1], d)$ হল একটা metric space. যেহেতু যে কোনো polynomial-ই একটা continuous function, তাই ঠিক একই প্রমাণ এখানেও খাটবে।

এবার দ্বিতীয় অংশ। একটা metric space-কে incomplete দেখানোর কায়দা তো আগের অংকগুলো থেকে শিখেই গেছ। সেটাই এখানেও লাগাব--

> Second part: Shall show incompleteness by showing a Cauchy sequence $\{p_n\}_n \subseteq P[0,1]$ that does not converge in $P[0,1]$.

আমরা এমন একটা polynomial sequence নেব, যেটা converge করে, কিন্তু limit-টা কোনো polynomial না হয়। ঠিক যেমন আমরা $\mathbb{Q}$-কে incomplete দেখানোর জন্য এমন একটা rational sequence নিয়েছিলাম, যেটা converge করেছিল $\sqrt{2}$-তে, যেটা একটা rational সংখ্যা নয়।

এরকম একটা polynomial sequence পাওয়া যাবে এইভাবে--

> Consider the polynomial sequence $\{p_n\}_n \subseteq P[0,1]$, where
>
> $$p_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

চেহারাটা দেখেই নিশ্চয়ই তোমার e^x-এর series-টার কথা মনে পড়ছে? আন্দাজ করতে পারছ যে $p_n(x)$-গুলো e^x-এ converge করবে, কিন্তু e^x মোটেই একটা polynomial নয়।

> Step 1: Let $C[0,1]$ be the set of all real-valued continuous functions on $[0,1]$, and let d be the sup-metric.
> Then $P[0,1] \subseteq C[0,1]$.
> Let $f(x) = e^x$.
> Shall show that $p_n \to f$ in $(C[0,1], d)$.
> By definition of e^x, for each $x \in [0,1]$,
>
> $$p_n(x) \to e^x.$$
>
> From Weierstrass' M-test we know that $p_n(x) \to e^x$ uniformly on $[0,1]$.

এই একটা বাক্যের মধ্যে অনেকটা গল্প লুকিয়ে আছে। প্রমাণের মধ্যে সেটা সাতকাহন করে বলতে গেলে বড্ড লম্বা হয়ে যাবে, তাই আলাদা করে বলছি। আমরা জানি যে প্রতিটি $x \in \mathbb{R}$-এর জন্যই

$$e^x = 1 + x + \tfrac{x^2}{2!} + \cdots.$$

এই infinite series-এর partial sum-গুলোকেই আমরা $p_n(x)$ নাম দিয়েছিলাম। সুতরাং $p_n(x) \to e^x$. এই convergence-টা যে $[0,1]$-এর উপরে uniform, সেটা আসছে Weierstrass' M-test থেকে, এইভাবে-- infinite series-টার

n-th term হল $\frac{x^n}{n!}$. যেহেতু $x \in [0,1]$ তাই

$$\left|\frac{x^n}{n!}\right| \leq \frac{1}{n!} = M_n, \text{ say.}$$

তাহলে $\sum M_n = \frac{1}{n!} \to e$. অতএব Weierstrass' M-test বলছে যে e^x-এর infinite series-টাও $[0,1]$-এর উপরে uniformly converge করতে বাধ্য। যদি M-test-টা একেবারেই অজানা জিনিস বলে মনে হয়, তবে আমাদের বাংলায়-বোঝানো-ইংরাজী-বই সিরিজের Real Analysis (volume 3) দেখে নিও।
এইবার দেখাব যে $\{p_n\}_n$ যদিও $C[0,1]$-এর মধ্যে converge করে, কিন্তু $P[0,1]$-এর মধ্যে converge করে না, মানে p_n-এর limit যে e^x সেটা একটা polynomial নয়। এখন e^x যে একটা polynomial নয়, সে তো সবাই জানি, কিন্তু দেখাব কী করে? তার একটা কৌশল আছে-- যে কোনো polynomial-কেই যথেষ্টবার differentiate করলে এক সময়ে 0 হয়ে যায়। কিন্তু e^x-কে যতই differentiate কর, সব সময়েই e^x-ই থাকে।

> Step 2: Shall show $e^x \notin P[0,1]$.
>
> [[Because:
>
> Let, if possible, e^x be a polynomial.
> $\because e^x \not\equiv 0$,
> $\therefore e^x$ must have a degree, n, say.
> Then $\frac{d^{(n+1)}}{dx^{n+1}} e^x \equiv 0$.
> But we know that all derivatives of e^x are
> $e^x \not\equiv 0 (\Rightarrow\Leftarrow)$.
>
>]]
>
> So $\{p_n\}_n$ does not converge in $P[0,1]$.
>
> Combining steps 1 and 2, we conclude that $\{p_n\}_n$ is Cauchy, but not convergent in $P[0,1]$. So $P[0,1]$ is not complete.

■

DAY 16
Cantor's intersection theorem

বলতে পারো $\sqrt{2} = ?$ এর একটা সহজ উত্তর হল $\sqrt{2} = 1.414...$ এখানে শেষের ওই ডট্ ডট্গুলোর মানে আবার কী? ওর মানেটা বোঝার পিছনে অংকের জগতের একটা বিখ্যাত theorem লুকিয়ে আছে, যেটা শেখাই আজকে আমাদের উদ্দেশ্য। যখন বলছি $\sqrt{2} = 1.414...$, তার মধ্যে অনেকগুলো কথা বলা আছে--

- এক, দশমিকের পরের সংখ্যাটা হল 4. তা থেকে বলতে পারি যে $\sqrt{2}$ রয়েছে 1.4 থেকে 1.5-এর মধ্যে, মানে $[1.4, 1.5]$-এর মধ্যে। সাবধান, এখানে কিন্তু $[1.4, 1.5)$ লিখি নি, কারণ 1.5-কে চাইলে আমরা 1.49999... হিসেবে লিখতে পারি। তাই দশমিকের পর প্রথম সংখ্যাটা 4 মানেই এই নয় যে সব মিলিয়ে 1.5 হয়ে যেতে পারে না।

- দশমিকের পর দ্বিতীয় সংখ্যাটা হল 1, তাই বলতে পারি $\sqrt{2} \in [1.41, 1.42]$.

- তারপরের সংখ্যাটা হল 4, সুতরাং $\sqrt{2} \in [1.414, 1.415]$.

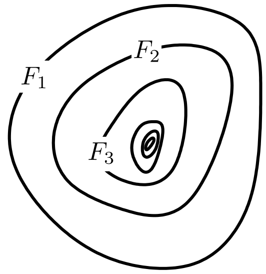


Fig 21

- বুঝতেই পারছ এভাবে যতই সংখ্যা দেওয়া হবে, ততই এরকম পরপর একটার ভিতর একটা closed interval পাওয়া যাবে--

$$[1.4, 1.5] \supseteq [1.41, 1.42] \supseteq [1.414, 1.415] \supseteq] \cdots .$$

প্রশ্ন হল এভাবে যদি দশমিকের পর যত সংখ্যা আছে তাদের সম্পূর্ণ sequence-টাই বলে দিই, তবে কি $\sqrt{2}$-কে সম্পূর্ণ প্রকাশ করা হবে? অংকের ভাষায় বললে, যদি $[a_n, b_n]$ হয় n-th closed interval-টা (মানে এখানে $[a_1, b_1] = [1.4, 1.5]$, তারপর $[a_2, b_2] = [1.41, 1.42]$, এইরকম), তবে $\sqrt{2}$ কি একমাত্র real সংখ্যা হবে, যেটা সবগুলো $[a_n, b_n]$-এর মধ্যেই থাকবে? বা, একটু ঘুরিয়ে বললে, $\cap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$ কি $\{\sqrt{2}\}$ হবে? উত্তরটা যে হ্যাঁ, সে তো আমরা জানিই, এবং সেটা প্রমাণ করা হয় **Cantor intersection theorem** দিয়ে। আমরা এই theorem-টা এখানে শিখব, তবে খালি $\mathbb{R}$-এর জন্য নয়, যেকোনো complete metric space-এর জন্যই।
ব্যাপারটা ছবি দিয়ে বুঝে নেওয়া সহজ। মনে করো অনেকগুলো set আছে $F_1, F_2, ...,$ যারা এক জন আরেক জনের পেটে পর পর ঢুকে আছে--

$$F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots .$$

Fig 21 দ্যাখো। এরকম একটার মধ্যে একটা set-এর sequence-কে অনেক সময়ে বলে nested sequence, কখনও বা বলে descending sequence বা decreasing sequence. ছবিতে লক্ষ কর যে set-গুলো ক্রমশঃ ছোটো হতে হতে একটা বিন্দুতে পরিণত হচ্ছে অথচ কোনো set-ই empty নয়। মানে $\text{diam}(F_n) \to 0$ কিন্তু $\forall n \in \mathbb{N} \quad F_n \neq \phi$. দুটো উদাহরণ নেওয়া যাক।

- ধরো, আমরা $\mathbb{R}$-এর মধ্যে কাজ করছি, আর $F_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$. তাহলে লক্ষ কর যে $\cap F_n = \phi$, অর্থাৎ এমন কোনো point নেই যেটা, সবগুলো F_n-এর মধ্যেই আছে।
- যদি $F_n = \left[0, \frac{1}{n}\right]$ নিতাম, তবে কিন্তু $\cap F_n = \{0\}$ হত।

Cantor's intersection theorem[2] বলে যে, যদি

- metric space-টা complete হয়,
- তার মধ্যে F_n-রা সবাই non-empty আর closed হয়,
- $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots$ হয়,
- এবং $\text{diam}(F_n) \to 0$ হয়,

তবে সব সময়েই $\cap F_n$ একটা singleton set হতে বাধ্য।
নীচের অংকে এটাই দেখাতে বলেছে।

Example 23: State and prove Cantor's intersection theorem on a complete metric space.[5]

(2010.11e,2008.11b)
SOLUTION:

---
[2]এই theorem-টার অন্যান্য সংস্করণও আছে, তবে এ বইতে আমরা খালি এই সংস্করণটাই আলোচনা করব।

Cantor's intersection theorem

Let (X,d) be a complete metric space and $\{F_n\}_n$ be a descending sequence of non-empty closed sets in (X,d) such that $\text{diam}(F_n) \to 0$ as $n \to \infty$. Then $\cap_{n=1}^{\infty} F_n$ is a singleton set.

Proof:

আমরা প্রমাণটা দুই ধাপে করব। প্রথম ধাপে দেখাব যে $\cap F_n$-এর মধ্যে অন্ততঃ একটা element আছে। আর দ্বিতীয় ধাপে দেখাব যে $\cap F_n$-এর মধ্যে একাধিক element থাকতে পারে না। দুয়ে মিলে প্রমাণ হয়ে যাবে যে $\cap F_n$-টা একটা singleton set.

Step I: Shall show $\cap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \phi$.

Since $\forall n \in \mathbb{N} \quad F_n \neq \phi$ so we can pick $a_n \in F_n$.

Shall show that $\{a_n\}_n$ is a Cauchy sequence, ie,

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m,n \geq N \quad d(a_m, a_n) < \epsilon.$$

এটা এক্ষুণি দেখাচ্ছি। আগে বলে নিই দেখিয়ে কী লাভ। যেহেতু complete metric space নিয়ে কাজ করছি, তাই Cauchy দেখাতে পারলেই convergent-ও দেখানো হবে। সুতরাং sequence-টার একটা limit পাব $\ell \in X$. দেখানো যাবে যে $\ell \in \cap F_n$ হবে। এ থেকেই প্রমাণ হয়ে যাবে যে $\cap F_n \neq \phi$.
এবার তাহলে Cauchy দেখানো শুরু করি--

$\forall \epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

$\because \text{diam}(F_n) \to 0,$

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \text{diam}(F_n) < \epsilon.$$

$\exists N$ Choose this $N \in \mathbb{N}$.

$\forall m,n$ Take any $m, n \geq N$.

W.l.g., let $m \leq n$.

Then $F_n \subseteq F_m$. ($\because$ descending sequence.)

So $a_m, a_n \in F_m$.

কারণ $a_m \in F_m$ তো আছেই, আর $a_n \in F_n \subseteq F_m$.

Now, $\because m \geq N$, $\therefore \text{diam}(F_m) < \epsilon$.

$\therefore d(a_m, a_n) \leq \text{diam}(F_m) < \epsilon$, as required.

আমরা জানি যে X একটা complete metric space. সুতরাং আমাদের Cauchy sequence $\{a_n\}_n$-টা X-এর মধ্যেই কোথাও একটা converge করতে বাধ্য। দেখাব যে এই limit-টা $\cap F_n$-এর মধ্যে থাকবে। তাহলেই দেখানো হয়ে যাবে যে $\cap F_n \neq \phi$.

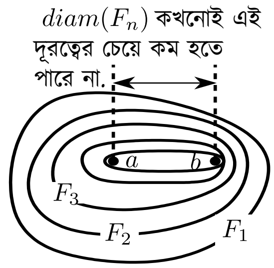


Fig 22

> Since X is complete, $\{a_n\}_n$ must converge in X. Let the limit be $\ell \in X$.
> Then, for each $n \in \mathbb{N}$, ℓ is the limit of a sequence lying in F_n.
> Since F_n is closed, hence $\ell \in F_n$.

তার মানে ℓ-টা সবগুলো F_n-এর মধ্যেই আছে। অর্থাৎ--

> Thus, $\ell \in \cap_{n=1}^{\infty} F_n$.
> So $\cap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \phi$, as required.

এইখানেই সমাধানের প্রথম ধাপ শেষ হল। এবার দ্বিতীয় ধাপে দেখাব যে $\cap F_n$-এর মধ্যে একাধিক element থাকা অসম্ভব। এর জন্য contradiction লাগাব। ধরো $a, b \in \cap F_n$ যেখানে $a \neq b$. তার মানে a আর b দুজনেই সবগুলো F_n-এর পেটের মধ্যেই আছে। সুতরাং $\text{diam}(F_n)$ যতই ছোটো হোক, $d(a, b)$-র চেয়ে তো আর ছোটো হতে পারে না! Fig 22 দ্যাখো। কিন্তু বলে দিয়েছে যে $\text{diam}(F_n) \to 0$. সুতরাং contradiction!

> Step 2: Shall show that $\cap_{n=1}^{\infty} F_n$ cannot contain more than one point:
> Let, if possible, $\exists a, b \in \cap_{n=1}^{\infty} F_n$, where $a \neq b$.
> Then $\forall n \in \mathbb{N} \quad a, b \in F_n$.
> $\therefore \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{diam}(F_n) \geq d(a, b) > 0$.
> $\therefore \text{diam}(F_n) \not\to 0 (\Rightarrow\Leftarrow)$.

এবার উপসংহার--

> So combining steps 1 and 2, $\cap_{n=1}^{\infty} F_n$ must be a singleton set, as required.

■

Exercise 13: Let (X, d) be a complete metric space and $\{F_n\}$ be any sequence of non-empty closed sets such that

$$F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \cdots$$

in this space with

$$\lim_{n \to \infty} \delta(F_n) = 0,$$

where $\delta(A)$ denotes the diameter of the set A. Prove that $F = \cap_{n=1}^{\infty} F_n$ contains exactly one point in X.[6] **(2006.12c)**
HINT: আগের অংকটাই। ■

Exercise 14: Let (X, d) be a complete metric space and $\{F_n\}_n$ be a descending sequence of non-empty bounded closed sets in (X, d) such that $\text{diam}(F_n) \to 0$ as $n \to \infty$. Prove that $\cap_{n=1}^{\infty} F_n$ is a singleton set.[5] **(2012.11e)**
HINT: আবার আগের অংকটাই, তবে বাড়তি ওই "bounded" শর্তটার আলাদা করে উল্লেখের দরকার ছিল না, কারণ যেহেতু $\text{diam}(F_n) \to 0$, সুতরাং একটা পর্যায়ের পরে F_n-রা bounded হতে এমনিতেই বাধ্য। ■

কোনো theorem-এর কোনো একটা শর্তের প্রয়োজন কোথায় সেটা উপলব্ধি করার একটা ভালো কায়দা হল শর্তটাকে বাদ দিয়ে দেখা যে কোথায় ঝামেলা বাঁধছে। নীচের অংকগুলোয় আমরা সেই কাজটাই করব। আমরা প্রথমে Cantor intersection theorem থেকে closed শর্তটা বাদ দিয়ে দেখব কী হয়।

Exercise 15: তোমাকে এমন একটা metric space দিতে হবে, যার মধ্যে $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots$ ইত্যাদিরা সকলেই non-empty এবং $\text{diam}(F_n) \to 0$, অথচ $\cap F_n$ একটা singleton set নয়।
HINT: আচ্ছা, একটু ধরিয়ে দিচ্ছি, ($\mathbb{R}$, Euclidean) নিয়ে কাজ করলেই চলবে। ■

এবার দেখি Cantor intersection theorem থেকে completeness শর্তটা বাদ দিলে কী হয়।

Exercise 16: এমন একটা metric space (X, d)-র উদাহরণ দিতে পারো যেটা complete নয় এবং যার মধ্যে এমন একটা descending sequence

$$F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots$$

আছে যেখানে সব F_n-ই X-এর মধ্যে closed, এবং nonempty, এবং $\text{diam}(F_n) \to 0$, অথচ $\cap F_n = \phi$? ■

Exercise 17: এমন একটা metric space (X, d)-র উদাহরণ দিতে পারো যেটা complete নয়, এবং যার মধ্যে এমন একটা descending sequence

$$F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots$$

আছে যেখানে সব F_n-ই X-এর মধ্যে closed, এবং nonempty, এবং $\text{diam}(F_n) \to 0$, অথচ $\cap F_n$-এর মধ্যে একাধিক element আছে? ■

আচ্ছা, Cantor intersection theorem-এ ওই $\text{diam}(F_n) \to 0$ শর্তটা কতটা জরুরী? সেটা নিয়েই নীচের অংকটা।

Exercise 18: (X, d) একটা complete metric space. তার মধ্যে $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots$ হল একটা decreasing sequence of closed non-empty sets. এমন কি হতে পারে যে $\cap F_n = \phi$? এমন কি হতে পারে যে $\cap F_n$-এর মধ্যে অন্ততঃ দুটো বিভিন্ন element আছে?
HINT: সহজ উত্তর, কিন্তু ঠাণ্ডা মাথায় ভাবো। ■

16.1 Converse

এবার Cantor intersection theorem-এর উল্টো দিকটা নিয়ে একটু গবেষণা করা যাক। ধরো, এমন একটা metric space দিলাম, যেখানে যখনই কোনো decreasing sequence of non-empty closed sets $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots$-এর জন্য $\text{diam}(F_n) \to 0$ হয়, তখনই $\cap_n F_n$ একটা singleton set হয়। তবে কি জোর দিয়ে বলা যায় যে metric space-টা complete হবেই? উত্তর হল--হ্যাঁ। সেটা নিয়েই নীচের অংকটা। ধীরে ধীরে পড়ো, নিতান্ত সহজ নাও লাগতে পারে।

Example 24: Let (X, d) be a metric space such that for every decreasing sequence of closed nonempty sets $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots$ with $\mathrm{diam}(F_n) \to 0$ we have $\cap_n F_n =$ some singleton set. Show that (X, d) must be complete.

SOLUTION: Complete দেখানো মানে এটা দেখানো যে সব Cauchy sequence-ই converge করে। সুতরাং যা খুশি একটা Cauchy sequence নিয়ে শুরু করা যাক--

> Let $\{a_n\}_n$ be any Cauchy sequence in (X, d).
> Shall show that $a_n \to \ell$ for some $\ell \in X$.

আমাদের শর্তটা দেওয়া আছে decreasing sequence of closed nonempty set দিয়ে। সুতরাং যেভাবেই হোক এইরকম একটা sequence পেতে হবে। তার একটা কায়দা এইরকম--

> Since $\{a_n\}_n$ is Cauchy, hence
> $$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N \quad d(a_m, a_n) < \epsilon.$$
> Taking $\epsilon = \frac{1}{k}$ for $k \in \mathbb{N}$ we can get a sequence $N_1 \leq N_2 \leq \cdots$ such that
> $$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N_k \quad d(a_m, a_n) < \frac{1}{k}.$$

এই জায়গাটা একটু বুঝে নাও। ধরো, প্রথমে $\epsilon = 1$ নিলাম, তা থেকে একটা N_1 পেলাম। এবার $\epsilon = \frac{1}{2}$ নিলে যে N_2-টা পাব, সেটা কিন্তু $\geq N_1$ নাও হতে পারে। কিন্তু $\epsilon = \frac{1}{2}$-র জন্য কোনো N_2 যদি কাজ করে, তবে তার চেয়ে বড় যেকোনো N_2-ও কাজ করবে। অতএব, নেহাত যদি N_2-টা $< N_1$ হয়েও যায়, তবে ওটাকে বাড়িয়ে $\geq N_1$ করে দিলেই চলবে। একইভাবে N_3-কে নেওয়া যাবে $\geq N_2$, ইত্যাদি।

> For $k \in \mathbb{N}$, let $T_k = \{a_n \ : \ n \geq N_k\}$ and $F_k = \overline{T}_k$.

এখানে $T_k = \{a_{N_k}, a_{N_k+1}, ...\}$-কে অনেক সময়ে sequence-টার tail বা লেজ বলা হয়। এই লেজগুলোর closure নিয়েই আমাদের F_k-গুলো তৈরী। যেহেতু closure নিয়েছি, তাই closed তো হবেই। ওদের nonempty হওয়া নিয়েও সন্দেহ নেই, কারণ T_k-রাই nonempty. আবার $N_1 \leq N_2 \leq \cdots$ হওয়ায় T_k-গুলো একটা decreasing sequence-ও তৈরী করবে। তাই F_k-দের sequence-টাও decreasing হবে, কারণ মনে রেখো A, B দুটো set হলে $A \subseteq B \implies \overline{A} \subseteq \overline{B}$.

> Each F_k is a nonempty closed set, and $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots$.

দেখানো বাকি খালি $\mathrm{diam}(F_n) \to 0$. আমরা জানি যেকোনো set A-র জন্যই $\mathrm{diam}(\overline{A}) = \mathrm{diam}(A)$ হয়। কেন হয় তা নিয়ে খানিকটা আলোচনা ছিল Example 7-এ (99 নম্বর পাতার ধারেকাছে কোথাও)। তাই $\mathrm{diam}(T_n) \to 0$ দেখানোই যথেষ্ট।

> Now, by choice of N_n, we have $\forall x, y \in T_n \quad d(x, y) < \frac{1}{n}$.
> So $\mathrm{diam}(T_n) \leq \frac{1}{n} \to 0$.
> Also for any $A \subseteq X$ we have $\mathrm{diam}(\overline{A}) = \mathrm{diam}(A)$.
> So $\mathrm{diam}(F_n) \to 0$.

ব্যস্, এবার আমাদের শর্তটা তাহলে লাগানো যায়--

> So by the given condition, $\cap_n F_n = \{\ell\}$ for some $\ell \in X$.

আমরা দেখাব যে এই ℓ-টাই আসলে $\{a_n\}_n$-এর limit! এইটা দেখানোর পথেও একটু প্যাঁচ আছে। আমরা প্রথমে দেখাব যে $\{a_n\}_n$-এর একটা subsequence অন্ততঃ ℓ-এ converge করে। যেহেতু $\{a_n\}_n$ হল একটা Cauchy sequence, তাই একটা subsequence যেখানে converge করে, পুরো sequence-টাই সেখানেই গিয়ে converge না করে পারবে না[3]

> $\because \mathrm{diam}(F_k) \leq \frac{1}{k}$, and $T_k \subseteq F_k$ and $\ell \in F_k$,
> $\therefore \forall x \in T_k \quad d(\ell, x) \leq \frac{1}{k}$.
> Hence we can pick n_1 such that $d(\ell, a_{n_1}) \leq 1$,
> and then can pick $n_2 > n_1$ such that $d(\ell, a_{n_2}) \leq \frac{1}{2}$.
> Continuing like this, we get a subsequence $\{a_{n_k}\}_k$ such that $a_{n_k} \to \ell$.

ব্যস্, subsequence অব্ধি হয়ে গেল। এবার পুরো sequence-টাকেই ℓ-এর পদতলে এনে ফেলতে হবে--

> Since $\{a_n\}_n$ is Cauchy, hence it must converge to ℓ, as required.

■

Answers

1. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x = 113 \\ 113 & \text{if } x = 0 \\ x & \text{otherwise} \end{cases}$ **2.** $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x = 113 \\ 113 & \text{if } x = 0 \\ 113 - \frac{1}{n} & \text{if } x = -\frac{1}{n} \text{ for } n \in \mathbb{N} \\ -\frac{1}{n} & \text{if } x = 113 - \frac{1}{n} \text{ for } n \in \mathbb{N} \\ x & \text{otherwise} \end{cases}$

3. "$\lim\left[\frac{1}{n} + (-\frac{1}{n})\right] = \lim \frac{1}{n} + \lim(-\frac{1}{n})$" ব্যাপারটা Euclidean metric-এর জন্য খাটে, সব metric-এর জন্য নাও খাটতে পারে! **5.** দুই জায়গায় লেগেছে--এক, $[0,1]$ হল closed, bounded তার উপরে যেকোনো continuous function-ই bounded হতে বাধ্য। সেই কারণেই জোর দিয়ে বলতে পেরেছিলাম যে $\sup\{|f(t) - g(t)| \;:\; t \in [a,b]\}$-টা exist করতে বাধ্য। দুই, closed and bounded set-এর উপরে continuous function-দের maximum থাকে (আমরা এখানে ($\mathbb{R}$, Euclidean) নিয়ে কাজ করছি)। তাই সমাধানের শেষ লাইনে $\sup\{|x_n(t) - x(t)| \;:\; t \in [a,b]\} = \max\{|x_n(t) - x(t)| \;:\; t \in [a,b]\} < \epsilon$ লিখতে পেরেছিলাম। নইলে খালি $\sup\{|x_n(t) - x(t)| \;:\; t \in [a,b]\} \leq \epsilon$ বলে থেমে যেতে হত। **6.** True. **7.** (i) Incomplete, (ii) complete, (iii) complete, (iv) incomplete, (v) complete. **8.** X-এর মধ্যে যেকোনো Cauchy sequence নাও। সেটা $\mathbb{R}$-এর মধ্যেও একটা Cauchy sequence, তাই $\mathbb{R}$-এর মধ্যে converge করতে বাধ্য। ধরো limit-টা হল ℓ. যদি X-টা closed হয়, তবে $\ell \in X$ হবেই, মানে Cauchy sequence-টা X-এর মধ্যেই converge করে গেল। বিপরীতপক্ষে, যদি X-টা complete হয়, তবে X-এর যেকোনো limit point নাও α. তাহলে X-এর মধ্যে একটা sequence পাবে, যেটা α-তে converge করে। যেহেতু converge করছে, তাই Cauchy sequence হতে বাধ্য। যেহেতু X-টা complete, তাই এর limit-টাও X-এর মধ্যেই থাকবে, মানে $\alpha \in X$ হবে। এইভাবে X-এর সব limit point-ই X-এর ভিতরেই থাকছে, তাই closed. **11.** Example 5 থেকে একটা hint পাবে। অংকটা 93 নম্বর পাতার কাছাকাছি কোথাও আছে। **15.** $F_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$. **16.** $X = (0, \infty)$, $d(x,y) = |x - y|$, $F_n = \left(0, \frac{1}{n}\right]$. **17.** অসম্ভব। **18.** ($\mathbb{R}$, Euclidean)-এর মধ্যে $F_n = [n, \infty)$ নিলে $\cap F_n = \phi$ হবে। যদি $F_n = [1,2]$ নাও (সব $n \in \mathbb{N}$-এর জন্যই), তবে $\cap F_n = [1,2]$ হবে।

---

[3] এইটা আমরা Example 15-এ দেখিয়েছিলাম। বোধহয় সেটা ছিল 108 নম্বর পাতায়, কিংবা তারই ধারেকাছে।

Chapter IV
Continuity

DAY 17
গোড়ার কথা

আমরা বারবারই বলেছি যে metric space ধারণাটার জন্ম real analysis থেকে। দ্বিতীয় অধ্যায়ে আমরা এরকম বহু ধারণার কথা বলেছি যেখানে এই মিলটা খুবই স্পষ্ট, যেমন neighbourhood, open set, closed set, interior, boundary, limit point ইত্যাদি। তৃতীয় অধ্যায়ে sequence-এর ক্ষেত্রেও বিভিন্ন সংজ্ঞা ছিল একেবারে real analysis-এর মতই, যেমন convergence এবং Cauchy sequence. আজকে আমরা এরকম আরেকটা অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ মিলের কথা আলোচনা করব, সেটা হল continuity. প্রথমে আমরা real analysis-এ continuity ব্যাপারটা কী ছিল, সেটা মনে করে শুরু করি। ধরো $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ একটা function, আর $a\in\mathbb{R}$. আমরা বলি যে "f is continuous at $x=a$" যখন x-কে a-এর খুব কাছে আনলেই $f(x)$-টা $f(a)$-র খুব কাছে থাকে। অংকের ভাষায়--

$$\forall\epsilon>0\quad\exists\delta>0\quad\forall x\in N(a,\delta)\quad f(x)\in N(f(a),\epsilon).$$

একইরকম সংজ্ঞা কাজ করবে যেকোনো metric space-এর ক্ষেত্রেই, খালি $\mathbb{R}$-এর জায়গায় থাকবে কোনো metric space. লক্ষ করো এখানে $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ লেখার সময়ে $\mathbb{R}$ এসেছে দুই জায়গায়, একবার domain হিসেবে, আরেকবার codomain হিসেবে। আমরা এই দুই জায়গায় চাইলে দুটো আলাদা metric space-ও লিখতে পারি, মানে $f:X\to Y$, যেখানে (X,d_1) আর (Y,d_2) হল দুটো metric space. যদি (X,d_1) আর (Y,d_2) দুজনেই আসলে একই metric space হয়, তাতেও অবশ্য কোনো আপত্তি নেই।

DEFINITION: Continuity

Let (X,d_1) and (Y,d_2) be any two metric spaces. Let $f:X\to Y$ be any function. Let $a\in X$. Then f is called **continuous at** $x=a$ if

$$\forall\epsilon>0\quad\exists\delta>0\quad\forall x\in N_X(a,\delta)\quad f(x)\in N_Y(f(a),\epsilon),$$

where $N_X(\cdot,\cdot)$ denotes a ball in (X,d_1) and $N_Y(\cdot,\cdot)$ denotes a ball in (Y,d_2).
If f is continuous at all points of X, then we say that f is a **continuous function**.

কিছু উদাহরণ করে সংজ্ঞাটা হজম করে নেওয়া যাক।

17.1 কিছু উদাহরণ

Example 1: ধরো $f:\mathbb{C}\to\mathbb{R}$ হল $f(z)=\mathrm{Re}(z)$, অর্থাৎ $z=x+iy$ হলে (যেখানে $x,y\in\mathbb{R}$), $f(z)=x$.

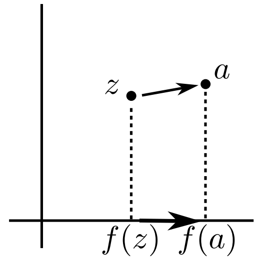


Fig 1

এটা কি একটা continuous function? এখানে $\mathbb{C}$-এর উপরে metric-টা হল $d(w,z)=|w-z|$, আর $\mathbb{R}$-এর উপরে Euclidean metric.

SOLUTION: প্রথমে ব্যাপারটা মনে মনে চিন্তা করে নেওয়া যাক। যে কোনো একটা $a\in\mathbb{C}$ নাও, সেখান থেকে একটা vertical লাইন টানলে সেটা যেখানে real axis-কে ছেদ করে, সেটাই $\mathrm{Re}(a)$, অর্থাৎ $f(a)$. ছবিতে দেখিয়েছি Fig 1-এ। এবার যা খুশি $z\in\mathbb{C}$ এবং তার জন্য $f(z)$-টা কল্পনা করো। মনে মনে ভাবো যে, z বিন্দুটা a বিন্দুর দিকে এগিয়ে যাচ্ছে। তবে কি $f(z)$-টাও $f(a)$-র দিকে এগিয়ে যাবে? আশা করি সন্দেহ নেই যে, উত্তর হল হ্যাঁ। অতএব ছবি দিয়ে আন্দাজ করা গেল যে continuous হবে। এবার অংকের ভাষায় লিখে প্রমাণ করার পালা।

To show

$\forall a\in\mathbb{C}\quad \forall\epsilon>0\quad \exists\delta>0\quad \forall z\in N_{\mathbb{C}}(a,\delta)\quad f(z)\in N_{\mathbb{R}}(f(a),\epsilon).$

এখানে $N_{\mathbb{C}}(\cdot,\cdot)$ হল $\mathbb{C}$-এর মধ্যে ball, আর $N_{\mathbb{R}}(\cdot,\cdot)$ হল $\mathbb{R}$-এর মধ্যে ball.

$\forall a$ Take any $a\in\mathbb{C}$.

$\forall\epsilon$ Take any $\epsilon>0$.

এবার জুৎসই একটা $\delta>0$ খুঁজতে হবে। একটু রাফ করে নেওয়া যাক। আমাদের চাই $f(z)\in N_{\mathbb{R}}(f(a),\epsilon)$, আর দেওয়া থাকবে $z\in N_{\mathbb{C}}(a,\delta)$. মানে দেওয়া থাকবে $|z-a|<\delta$, আর দেখাতে হবে $|\mathrm{Re}(z)-\mathrm{Re}(a)|<\epsilon$, অর্থাৎ $|\mathrm{Re}(z-a)|<\epsilon$. আমরা জানি যে, যেকোনো $\alpha\in\mathbb{C}$-এর জন্যই $|\mathrm{Re}(\alpha)|\leq|\alpha|$ হয়[1]। তাই $|z-a|<\epsilon$ দেখাতে পারলেই চলবে। সুতরাং $\delta=\epsilon$ নেওয়াই যথেষ্ট।

$\exists\delta$ Choose $\delta=\epsilon>0$.

$\forall z$ Take any $z\in N_{\mathbb{C}}(a,\delta)$.

Then $|f(z)-f(a)|=|\mathrm{Re}(z-a)|\leq|z-a|<\delta=\epsilon$.

So $f(z)\in N_{\mathbb{R}}(f(a),\epsilon)$, as required.

■

Exercise 1: একইভাবে দেখাও যে $f(z)=\mathrm{Im}(z)$ হল $\mathbb{C}$ থেকে $\mathbb{R}$-এ একটা continuous function. ■

[1] এখানে একটু সাবধান। $|\mathrm{Re}(\alpha)|$ লেখার সময়ে $|\cdots|$ দিয়ে real সংখ্যার absolute value বোঝানো হচ্ছে, আর $|\alpha|$-র বেলায় complex সংখ্যার modulus বোঝাচ্ছি।

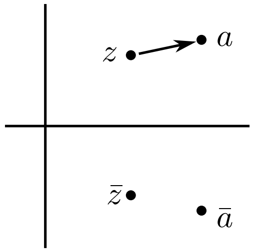


Fig 2

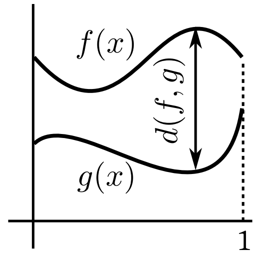


Fig 3

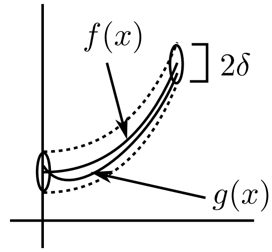


Fig 4

Exercise 2: আচ্ছা, $f(z) = \bar{z}$ কি $\mathbb{C}$ থেকে $\mathbb{C}$-তে একটা continuous function?
HINT: ছবি দিয়ে চিন্তা করে নাও প্রথমে (Fig 2)। ■

এবার একটু জটিল উদাহরণ দেখা যাক।

Example 2: আমাদের metric space-টা এবার নেব $B[0, 1]$, যেটা হল $[0, 1]$ থেকে $\mathbb{R}$-এ যাবতীয় bounded function-এর set. যেমন, $B[0, 1]$-র একজন সদস্য হল $f_1 : [0, 1] \to \mathbb{R}$, যেখানে $f_1(x) = x^2$. আরেক জন সদস্য হল $f_2 : [0, 1] \to \mathbb{R}$, যেখানে

$$f_2(x) = \begin{cases} 2 & \text{if } x \in [0, 0.5] \\ 3 & \text{if } x \in (0.5, 1] \end{cases} .$$

এই $B[0, 1]$-এর উপরে sup-metric নেব, অর্থাৎ-- যদি $f, g \in B[0, 1]$ হয়, তবে

$$d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| \ : \ x \in [0, 1]\},$$

যেহেতু bounded function-দের নিয়ে কাজ হচ্ছে, তাই sup বার করতে কোনো অসুবিধা নেই। সহজভাবে ভাবলে $f(x)$ আর $g(x)$-এর গ্রাফের মধ্যে দূরত্বটা সবচেয়ে বেশী যতদূর অব্ধি বাড়তে পারে, সেটাই হল $d(f, g)$. বোঝার জন্য Fig 3 দেখে নিতে পারো। এবার $F : B[0, 1] \to \mathbb{R}$ দিচ্ছি এইভাবে, $f \in B[0, 1]$ হলে $F(f) = f(0)$. বোঝার সুবিধার জন্য একটা উদাহরণ নাও। একটু আগে যে f_1, f_2-র কথা বললাম, তাদের উপর F লাগালে পাবে $F(f_1) = f_1(0) = 0$ এবং $F(f_2) = f_2(0) = 2$. তোমাকে বলতে হবে এই F-টা continuous কিনা!
SOLUTION: যেকোনো একটা $f \in B[0, 1]$ নেওয়া যাক। এবার এমন কোনো $g \in B[0, 1]$ নাও, যেটা f-এর খুব কাছে থাকে, মানে $d(f, g) < \delta$ হয়। ছবি দিয়ে ভাবলে, ওদের গ্রাফ দুটো পরস্পরের থেকে সর্বদা δ-র চেয়ে কম দূরত্বে থাকে, অর্থাৎ যদি f-এর গ্রাফটা ঘিরে উপরে নীচ δ পরিমাণ দূরত্ব পর্যন্ত একটা টিউব নাও (Fig 4), তবে g-এর গ্রাফটা সেই টিউবের মধ্যে থাকবে। এরকম অবস্থায় $F(g)$ কি $F(f)$-এর খুব কাছে থাকতে বাধ্য, মানে $g(0)$ কি $f(0)$-র খুব কাছে থাকতে বাধ্য? অবশ্যই বাধ্য, যদি সব $x \in [0, 1]$-এর জন্যই $|f(x) - g(x)| < \delta$ হয়, তবে $x = 0$ বসালেই তো দেখা যাচ্ছে যে $|f(0) - g(0)| < \delta$ হবে। সুতরাং F নিশ্চয়ই continuous হবে। এবার খালি অংকের ভাষায় এই চিন্তাটাকে লিখে ফেলার অপেক্ষা।

To Show

◎ $\forall f \in B[0, 1] \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall g \in N_{B[0,1]}(f, \delta) \quad F(g) \in N_{\mathbb{R}}(F(f), \epsilon)$.

$\forall f$ Take any $f \in B[0, 1]$.

$\forall \epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

$\exists \delta$ Choose $\delta = \epsilon > 0$.

$\forall g$ Take any $g \in N_{B[0,1]}(f, \delta)$.

Then $|F(f)-F(g)| = |f(0)-g(0)| \le \sup\{|f(x)-g(x)| \ : \ x\in[0,1]\} = d(f,g) < \epsilon$.
Hence $F(g)\in N_{\mathbb{R}}(F(f),\epsilon)$, as required.

■

একই কায়দায় নীচের অংকটা করতে পারো কিনা দ্যাখো।

Exercise 3: Consider the metric space $C[0,1]$ consisting of all continuous functions from $[0,1]$ to $\mathbb{R}$ under the sup-metric. In each of the following cases, prove that the function $F : C[0,1]\to\mathbb{R}$ is a continuous function.
(*i*) $F(f)=f(1)$. (*ii*) $F(f)=2f(0.1)-3f(0.9)$. (*iii*) $F(f)=\int_0^1 f(t)dt$. (*iv*) $F(f)=\int_0^1 t^2 f(t)dt$.
HINT:
তিন নম্বর অংকটায় integral-এর triangle inequality লাগালে সুবিধা হবে, মানে

$$|F(f)-F(g)| = \left|\int_0^1 f(t)-g(t)dt\right| \le \int_0^1 |f(t)-g(t)|dt.$$

■

এইবার একটা অদ্ভুত উদাহরণ দেখব, যেটা প্রমাণ হয়ে যাবে সহজেই, কিন্তু হজম হতে বেশ সময় নেবে।

Example 3: আমাদের metric space-টা এখানে নেব X, যার সদস্যরা হল $[0,1]$ থেকে $\mathbb{R}$-এ যাবতীয় piecewise linear, continuous function. এরকম কিছু function-এর গ্রাফ দেখিয়েছি Fig 5-এ। এই ছবিটা থেকে piecewise linear, continuous-এর ব্যাপারটা বুঝে নাও-- X-এর প্রতিটা সদস্যের গ্রাফ হল finite-সংখ্যক সরলরেখা একটার পরে একটা জুড়ে জুড়ে তৈরী। এদের set-এর উপরে metric-টা নেব আগের অংকের মতই, sup-metric. যে function-টা নিয়ে কাজ করব সেটা হল "গ্রাফের দৈর্ঘ্য", $\ell : X\to\mathbb{R}$. অর্থাৎ কোনো $f\in X$ দেওয়া থাকলে f-এর গ্রাফটা যে সব সরলরেখার টুকরো জুড়ে জুড়ে তৈরী তাদের মোট দৈর্ঘ্যটাই হল $\ell(f)$. যেমন, $f(x)=\begin{cases} 0.5 & \text{if } x\in[0,0.5] \\ 1-x & \text{otherwise}\end{cases}$ হলে $\ell(f)$ কত হবে সেটা দেখিয়েছি Fig 6-এ। একইভাবে $f(x)=x$ হলে $\ell(f)=\sqrt{2}$. আবার $f\equiv 0$ হলে, $\ell(f)=1$, এইরকম। তোমাকে বলতে হবে-- এই $\ell(\cdot)$ নামক function-টা কি continuous?
SOLUTION: সহজ বুদ্ধিতে ভাবলে প্রশ্নটা হল--

> যদি $f,g\in X$ নিই, যারা পরস্পরের খুব কাছে (মানে গ্রাফ দুটো একেবারে মিলে মিশে যেন একাকার হয়ে আছে), তবে ওদের গ্রাফের দৈর্ঘ্যও কি কাছাকাছি থাকতে বাধ্য?

Fig 5

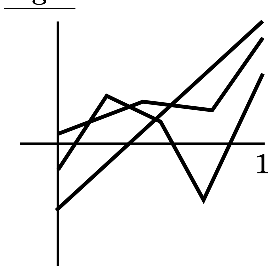


Fig 6

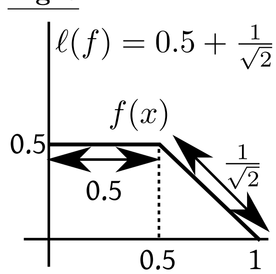


Fig 7

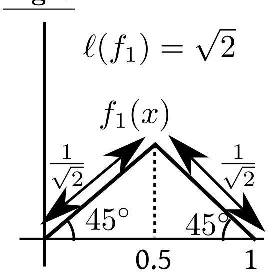
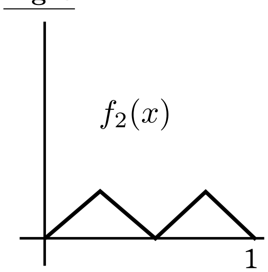


Fig 8



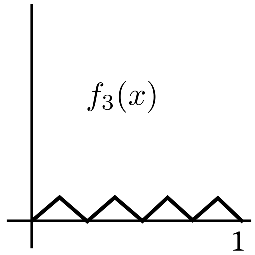


Fig 9

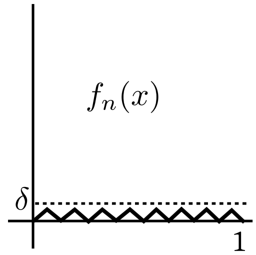


Fig 10

ফস্ করে ভাবলে মনে হয় যেন হবে। আসলে কিন্তু নাও হতে পারে। এবং সেটা ছবি এঁকেই চমৎকার বোঝা যায়! প্রথমে Fig 7 দ্যাখো। এখানে $\ell(f_1) = \sqrt{2}$. লক্ষ করো, এখানে একটা ভাঁজ আছে। যদি f_1-এর প্রতিটা লাইনকে আরেকবার করে ভাঁজ করি, তবে পাব Fig 8. এখানেও কিন্তু দৈর্ঘ্যটা একই আছে, $\ell(f_2) = \sqrt{2}$. আরেক ধাপ ভাঁজ করলে পাবে Fig 9, সেখানেও কিন্তু $\ell(f_3) = \sqrt{2}$. এইভাবে যতবারই ভাঁজ করো না কেন, দৈর্ঘ্যটা কিন্তু সেই $\sqrt{2}$-ই থাকবে। এদিকে যতই ভাঁজ করবে, ততই লক্ষ করো f_n-রা 0-র কাছে চলে আসছে। যদি $f(x) \equiv 0$ নিই, তবে যাই $\delta > 0$ দাও না কেন, এমন একটা $n \in \mathbb{N}$ পাবে, যাতে $d(f_n, f) < \delta$ হবে, যেমন দেখিয়েছি Fig 10-এ। কিন্তু তাও $\ell(f) = 1$ আর $\ell(f_n) = \sqrt{2}$-ই থেকে যাবে, মানে $\ell(f_n)$ মোটেই $\ell(f)$-এর কাছে আসছে না। অতএব $\ell(\cdot)$ মোটেই continuous নয়! ■

17.2 পুরোনো থেকে নতুন

আমরা হায়ার সেকণ্ডারীতে continuous function-দের সঙ্গে প্রথম পরিচয়ের সময়ে শিখি যে, continuous function-দের যোগ, বিয়োগ আর গুণ করলেও continuous function-ই পাওয়া যায়। ভাগের বেলাতেও প্রায় তাই, খালি শূন্য দিয়ে ভাগ না হয়ে যায়, সেটা খেয়াল রাখতে হয়। এইভাবে আমরা বিভিন্ন continuous function-দের জুড়ে জুড়ে নতুন নতুন continuous function বানাতে পারতাম। তবে যেকোনো metric space-এই তো আর যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ করা যায় না। সেই কারণে metric space-এর উপর continuous function-এর আলোচনায় এই ধর্মটা খুব একটা গুরুত্ব পায় না। কিন্তু পুরোনো continuous function-দের জুড়ে নতুন continuous function বানানোর আরেকটা কায়দা ছিল, যেটা metric space-এর ক্ষেত্রেও সমভাবে প্রযোজ্য, সেটা হল **composition**, অর্থাৎ একটা function-এর পেটে আরেকটা function ঢোকানো। এই নিয়েই নীচের theorem-টা--

> THEOREM
> The composition of two continuous functions is continuous.

Proof: প্রথমে অংকের ভাষায় লিখে নিই, কী দেখাতে হবে--

> Let (X, d_1), (Y, d_2) and (Z, d_3) be metric spaces. Let $f : X \to Y$ and $g : Y \to Z$ be continuous functions. Shall show that $g \circ f : X \to Z$ must be a continuous function, ie,
>
> $\forall a \in X \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in N_X(a, \delta) \quad g(f(x)) \in N_Z(g(f(a)), \epsilon).$

প্রথমেই দুটো $\forall$ আছে, তাই--

> $\forall a$ Take any $a \in X$.

$\boxed{\forall\epsilon}$ Take any $\epsilon > 0$.

এবার একটা $\exists\delta$ আছে, তাই আমাদের কাজ হল একটা জুৎসই $\delta > 0$ খুঁজে বার করা--

Since g is continuous at $f(a)$, hence

$$\exists\eta > 0 \quad \forall y \in N_Y(f(a), \eta) \quad g(y) \in N_Z(g(f(a)), \epsilon). \qquad (*)$$

Again, since f is continuous at a, hence

$$\exists\delta > 0 \quad \forall x \in N_X(a, \delta) \quad f(x) \in N_Y(f(a), \eta).$$

$\boxed{\exists\delta}$ Choose this $\delta > 0$.

$\boxed{\forall x}$ Take any $x \in N_X(a, \delta)$.

Then $f(x) \in N_Y(f(a), \eta)$, and hence, by (*), $g(f(x)) \in N_Z(g(f(a)), \epsilon)$, as required.

[Q.E.D]

17.3 $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

যতই উদ্ভট উদ্ভট metric-এর কথা বলি না কেন, এ কথা অনস্বীকার্য যে, সবচেয়ে বেশী কাজ হয় $\mathbb{R}^n$ জাতীয় set-এর উপরে Euclidean metric নিয়েই। তাই যদি কোনো function দেওয়া থাকে $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, তবে সেটা Euclidean metric-এর সাপেক্ষে continuous কিনা, সেটা চট্ জলদি বুঝতে পারা একটা কাজের জিনিস। তার জন্য নানা কায়দাকানুন আমরা real analysis এবং multivariate calculus শেখার সময়েই শিখেছি। সেগুলো সংক্ষেপে একটু মনে করে নিই। যদি $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ হয়, তবে এইধরণের বিভিন্ন continuous function-দের তালিকা আমরা হায়ার সেকণ্ডারী থেকেই শিখে রাখি। যেমন, $\sin x, \cos x, e^x, |x|$ আর polynomial-রা সর্বত্রই continuous. আবার $\tan x, \frac{1}{x}, \log x$ যদিও $\mathbb{R}$-এর সর্বত্র defined নয়, কিন্তু যেখানে defined, সেখানে continuous-ও বটে। এইসব পরিচিত continuous function-দের যোগ-বিয়োগ-গুণ-ভাগ ইত্যাদি দিয়ে মিলিয়েজুলিয়ে $e^x + \sin x$, $\log x + e^{x/2}$ ইত্যাদি আরো অনেক continuous function বানানো যায়। এই হল $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$-এর বেলায় continuity-র গল্প। এবার দেখি $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$-এর বেলায় কী করে continuous function-দের চিনতে হবে।

আমরা জানি $\mathbb{R}^m$-এর সদস্যরা দেখতে $(x_1, ..., x_m)$-এর মত, যেখানে x_i-রা সবাই $\mathbb{R}$-এর মধ্যে আছে। এখানে Euclidean metric-টা হল

$$d((x_1, ..., x_m), (y_1, ..., y_m)) = \sqrt{\left(\sum_1^m (x_i - y_i)^2\right)}.$$

মনে রেখো, $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ -জাতীয় সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ function-রা হল $f_i(x_1, ..., x_m) = x_i$, যেখানে $i = 1, ..., m$. অনেক সময়ে f_i-কে বলা হয় i-th **coordinate function**. এরা সকলেই continuous. প্রমাণটা খুবই সহজ, নীচের অংকে প্রমাণটা তোমাকেই করতে দিলাম।

Exercise 4: দেখাও যে Euclidean metric-এর সাপেক্ষে প্রতিটা f_i-ই একেকটা continuous function.

HINT:

একটু ধরিয়ে দিই--যদি $(x_1, ..., x_m), (y_1, ..., y_m) \in \mathbb{R}^m$ হয়, তবে

$$d\big((x_1, ..., x_m), (y_1, ..., y_m)\big) = \sqrt{\sum_1^m (x_i - y_i)^2} \geq \sqrt{(x_i - y_i)^2} = |x_i - y_i|.$$

■

Coordinate function-রা সকলেই continuous জেনে গেলাম। এবার এদের উপরে আমাদের পরিচিত $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ যেসব continuous function আছে, তাদের লাগালে আরো অনেক continuous function পাবে, কারণ continuous function-দের composition-ও continuous-ই হয়। সুতরাং এইভাবে $f(x_1, x_2, x_3) = \sin x_1$ বা $f(x_1, x_2, x_3) = e^{x_2}$-জাতীয় বিস্তর continuous function তৈরী করা যাবে। এদেরকে যোগ, বিয়োগ আর গুণ করলে আরও continuous function পাওয়া যাবে, যেমন $f(x_1, x_2, x_3) = e^{x_2 - x_3} + \sin x_1$ একটা continuous function.

Example 4: $\mathbb{R}^{n\times n}$ হল যাবতীয় $n \times n$ সাইজের matrix-দের set, যাদের entry-গুলো একেকটা real সংখ্যা। যেকোনো $n \times n$ সাইজের matrix-এই ঠিক n^2-টা করে সংখ্যা থাকে। এদেরকে যদি তুমি matrix-এর আকারে না সাজিয়ে এক লাইনে কল্পনা করো, তবে $\mathbb{R}^{n\times n}$-কে তুমি বস্তুতঃ $\mathbb{R}^{n^2}$ বলেও ভাবতে পারো। যেমন ধরো $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ হল $\mathbb{R}^{2\times 2}$-এর সদস্য। সংখ্যাগুলোকে এক লাইনে লিখলে হবে $(1, 2, 3, 4)$, যেটা $\mathbb{R}^4$-এর সদস্য। সুতরাং $\mathbb{R}^{n^2}$-এর Euclidean metric-টা $\mathbb{R}^{n\times n}$-এর উপরেও খাটানো যায়। যদি $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ হয়, তবে এই metric অনুযায়ী তাদের দূরত্ব হবে

$$d(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - b_{ij})^2}.$$

এখানে a_{ij} হল A-র (i, j)-th entry, আর b_{ij} হল B-এর (i, j)-th entry.
যেকোনো $n \times n$ সাইজের matrix-এরই determinant বার করা যায়, এবং সেটা হয় একটা real সংখ্যা। সুতরাং determinant হল $\mathbb{R}^{n\times n}$ থেকে $\mathbb{R}$-এ একটা function. বলো তো এই function-টা কি continuous?
SOLUTION: হ্যাঁ, যেহেতু খালি যোগ বিয়োগ আর গুণ ব্যবহার করেই determinant বার করা যায়, তাই অবশ্যই continuous. ■

এভাবে $\mathbb{R}^m$ থেকে $\mathbb{R}$-এর নানা continuous function-এর পরিচয় পাওয়া গেল। এবার $\mathbb{R}^m$ থেকে $\mathbb{R}^n$-এ continuous function-দের খবর নেওয়া যাক।
মনে রেখো যদি $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ নাও, তবে এর মধ্যে আসলে n-খানা function ঢুকে আছে, যারা প্রত্যেকে $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. যেমন $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, e^{x_2 - x_1 x_3})$ হল $\mathbb{R}^3$ থেকে $\mathbb{R}^2$-তে একটা function--

> তুমি $\mathbb{R}^3$-র যেকোনো সদস্য দাও, যেমন $(1, 2, 3)$. এর উপরে f লাগালে পাবে $\mathbb{R}^2$-এর একটা সদস্য, $f(1, 2, 3) = (1 + 3, e^{2-1\times 3}) = (4, e^{-1})$.

এখানে $f(x_1, x_2, x_3)$ আসলে দুটো function মিলিয়ে তৈরী--, এক, $f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_3$, আর দুই, $f_2(x_1, x_2, x_3) = e^{x_2 - x_1 x_3}$. এই f_1 আর f_2-কে অনেক সময়ে বলে f-এর দুটো **component function**. আমাদের উদাহরণে এরা দুজনেই continuous। তাই আমরা জোর দিয়ে বলতে পারি যে, f-ও continuous হতে বাধ্য। এই কায়দাটা সবসময়েই খাটে। যদি $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$-এর component function-গুলো হয় $f_1, ..., f_n : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, তবে f-এর continuous হওয়া, আর f_i-দের continuous হওয়া সমার্থক। মনে রেখো এখানে আমরা Euclidean metric নিয়ে কাজ করছি। অন্য কোনো metric নিলে ব্যাপারটা নাও হতে পারে।
এই জিনিসটা অনেক কাজে লাগে, তাই একটা theorem হিসেবে লিখে এবার প্রমাণ করব। তার জন্য Euclidean metric-এর একটা ধর্ম খেয়াল রাখলে সুবিধা হবে। ধরো $(x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$. যদি এদের মধ্যে দূরত্ব খুব কম হয়, ধরো $\sqrt{\sum_1^n (x_j - y_j)^2} < \epsilon$, তবে প্রতিটা $|x_j - y_j|$-ই খুব ছোটো হতে বাধ্য। কারণ

$$(x_i - y_i)^2 \le \sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2 < \epsilon^2.$$

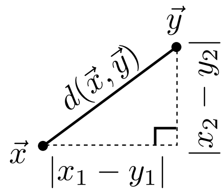


Fig 11

বিপরীতপক্ষে, যদি প্রতিটা $|x_j - y_j|$-ই যথেষ্ট ছোটো হয়, ধরো $|x_j - y_j| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}$, তবে

$$\sqrt{\sum_1^n (x_j - y_j)^2} < \sqrt{\underbrace{\frac{\epsilon^2}{n} + \cdots + \frac{\epsilon^2}{n}}_{n \text{ times}}} = \epsilon.$$

পুরো ব্যাপারটা $\mathbb{R}^2$-এর জন্য ছবি এঁকে দেখিয়েছি Fig 11-এ। এখানে $\vec{x} = (x_1, x_2)$ আর $\vec{y} = (y_1, y_2)$-এর মধ্যে দূরত্বটা হল hypotenuse-টার দৈর্ঘ্য, আর $|x_i - y_i|$ দুটো হল অন্য বাহু দুটোর দৈর্ঘ্য। যদি hypotenuse-টা ছোটো হয়, তবে বাকী বাহু দুটোও ছোটো হতে বাধ্য। আবার বাকী বাহু দুটো ছোটো হলে hypotenuse-টাও ছোটো হতে বাধ্য।
এই ব্যাপারটা নীচের theorem-টা প্রমাণ করতে কাজে দেবে।

THEOREM

Let $f_1, ..., f_n : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ be any n functions. We define a function $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ as $f(x) = (f_1(x), ..., f_n(x))$. We consider Euclidean metrics on $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n$ and $\mathbb{R}$. Then f is continuous if and only if $f_1, ..., f_n$ are all continuous.

Proof: এটা একটা if and only if-জাতীয় জিনিস। তাই প্রমাণটা দুইভাগে ভেঙে করলে সুবিধা হবে--only if এবং if. প্রথমে only if অংশটা করব, অর্থাৎ--

(Only if part): Given: f is continuous.

To show: $f_1, ..., f_n$ are all continuous, ie,

$\forall i \in \{1, ..., n\} \quad \forall \vec{a} \in \mathbb{R}^m \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \vec{x} \in N_{\mathbb{R}^m}(\vec{a}, \delta) \quad f_i(\vec{x}) \in N_{\mathbb{R}}(f_i(\vec{a}), \epsilon).$

প্রথমেই একগুচ্ছ $\forall$ আছে, অতএব--

$\forall i$ Take any $i \in \{1, .., m\}$.

$\forall \vec{a}$ Take any $\vec{a} \in \mathbb{R}^m$.

$\forall \epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

এরপর আছে একটা $\exists \delta$, সুতরাং মাথা খাটিয়ে একটা উপযুক্ত $\delta > 0$ বার করতে হবে--

$\because f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ is continuous,

$$\therefore \exists \delta > 0 \quad \forall \vec{x} \in N_{\mathbb{R}^m}(\vec{a}, \delta) \quad f(\vec{x}) \in N_{\mathbb{R}^n}(f(\vec{a}), \epsilon). \qquad (*)$$

এই δ-টাই আমরা নেব।

$\exists\delta$ Choose this $\delta > 0$.

$\forall\vec{x}$ Take any $\vec{x} \in N_{\mathbb{R}^m}(\vec{a}, \delta)$.

Then, by (*), $f(\vec{x}) \in N_{\mathbb{R}^n}(f(\vec{a}), \epsilon)$.

So $\sum_1^n (f_j(\vec{x}) - f_j(\vec{a}))^2 < \epsilon^2$.

এটা কী করে হল, বুঝলে তো? $f(\vec{x}) \in N_{\mathbb{R}^n}(f(\vec{a}), \epsilon)$ হওয়া মানে $(f_1(\vec{x}), ..., f_n(\vec{x}))$ আর $(f_1(\vec{a}), ..., f_n(\vec{a}))$-র মধ্যে Euclidean metric হল $< \epsilon$. অর্থাৎ কিনা $\sqrt{\sum_1^n (f_j(\vec{x}) - f_j(\vec{a}))^2} < \epsilon$. সেটাকে square করেই এটা পেয়েছি।

Thus, $(f_i(\vec{x}) - f_i(\vec{a}))^2 \leq \sum_{j=1}^n (f_j(\vec{x}) - f_j(\vec{a}))^2 < \epsilon^2$, and so $|f_i(\vec{x}) - f_i(\vec{a})| < \epsilon$.

Hence $f_i(\vec{x}) \in N_{\mathbb{R}}(f_i(\vec{a}), \epsilon)$, as required.

এবার অন্য দিকটা প্রমাণ করার পালা--

(If part): Given $f_1, ..., f_n$ are all continuous.

To show: f is continuous, ie,

$$\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^m \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \vec{x} \in N_{\mathbb{R}^m}(\vec{a}, \delta) \quad f(\vec{x}) \in N_{\mathbb{R}^n}(f(\vec{a}), \epsilon).$$

$\forall\vec{a}$ Take any $\vec{a} \in \mathbb{R}^m$.

$\forall\epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

এবার δ বার করব।

$\because f_1, ..., f_m : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ are all continuous,

$$\therefore \forall i \in \{1, ..., n\} \quad \exists \delta_i > 0 \quad \forall \vec{x} \in N_{\mathbb{R}^m}(\vec{a}, \delta_i) \quad f_i(\vec{x}) \in N_{\mathbb{R}}\left(f_i(\vec{a}), \tfrac{\epsilon}{\sqrt{n}}\right). \qquad (*)$$

এখানে $\frac{\epsilon}{\sqrt{n}}$ কেন নিয়েছি, সেটা বোঝা গেল? আমরা প্রমাণের আগেই আলোচনা করেছিলাম যে, $\vec{x} = (x_1, ..., x_n), \vec{y} = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ হলে যদি প্রতিটা $|x_i - y_i| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}$ হয়, তবে $d(\vec{x}, \vec{y}) < \epsilon$ হয়। এখানেও তেমনি $|f_i(\vec{x}) - f_i(\vec{a})| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}$ হলে $f(\vec{x})$ আর $f(\vec{a})$ পরস্পরের থেকে $< \epsilon$ দূরত্বে থাকবে।

$\exists\delta$ Choose $\delta = \min\{\delta_1, ..., \delta_n\} > 0$.

$\forall\vec{x}$ Take any $\vec{x} \in N_{\mathbb{R}^m}(\vec{a}, \delta)$.

Then $\forall i \in \{1, ..., n\} \quad \vec{x} \in N_{\mathbb{R}^m}(\vec{a}, \delta_i)$.

কারণ δ হল সব δ_i-দের মধ্যে ছোটো।

Hence, by (*), $f_i(\vec{x}) \in N_{\mathbb{R}}\left(f_i(\vec{a}), \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}\right)$.
So $|f_i(\vec{x}) - f_i(\vec{a})| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}$.
Hence $d_{\mathbb{R}^n}(f(\vec{x}), f(\vec{a})) = \sqrt{\sum_1^n |f_i(\vec{x}) - f_i(\vec{a})|^2} < \sqrt{\underbrace{\frac{\epsilon^2}{n} + \cdots + \frac{\epsilon^2}{n}}_{n \text{ times}}} = \epsilon$.

Thus, $f(\vec{x}) \in N_{\mathbb{R}^n}(f(\vec{a}), \epsilon)$, as required.

[Q.E.D]

এই theorem-এ আমরা Euclidean metric ব্যবহার করেছি। আমাদের function-টা ছিল $\mathbb{R}^m$ থেকে $\mathbb{R}^n$-এ। প্রমাণটা ভালো করে খুঁটিয়ে পড়লেই দেখবে যে, $\mathbb{R}^m$-এর উপরে কী metric নিচ্ছি, তাতে কিন্তু কিছুই এসে যায় না। Euclidean metric-টা দরকার হল $\mathbb{R}^n$-এর উপর। বস্তুতঃ $\mathbb{R}^m$-এর জায়গায় যা খুশি metric space নিলেও প্রমাণের মূল যুক্তিটা একই থাকত। সেখান থেকেই নীচের অংকটার জন্ম।

Exercise 5: Let (X, d) be any metric space. Let $f_1, ..., f_n : X \to \mathbb{R}$ be any n functions. We define a function $f : X \to \mathbb{R}^n$ as $f(x) = (f_1(x), ..., f_n(x))$. We consider Euclidean metrics on $\mathbb{R}^n$ and $\mathbb{R}$. Then show that f is continuous if and only if $f_1, ..., f_n$ are all continuous. ■

DAY 18
Metric, domain আর codomain-এর উপর নির্ভরতা

18.1 Metric বদলালে continuity-ও বদলায়

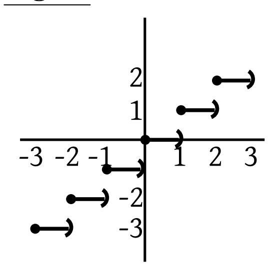
আমরা জানি যে একটা metric space তৈরী হয় দুটো জিনিস দিয়ে--এক, একটা set, আর দুই, তার উপরে একটা metric. ধরো X একটা set নিলাম, যার উপর d একটা metric, আবার d' আরেকটা metric. তবে (X, d) আর (X, d') দুটো আলাদা metric space. এদের ধর্মের মধ্যে আকাশপাতাল পার্থক্য থাকতে পারে। (X, d)-এর সাপেক্ষে যে function-টা continuous, সেটা (X, d')-এর সাপেক্ষে continuous নাই হতে পারে। এরকম একটা উদাহরণ দেখা যাক।

Example 5: Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be defined as $f(x) = [x]$, where $[x]$ denotes the largest integer $\leq x$.

Let d denote the Euclidean metric and d' denote the discrete metric on $\mathbb{R}$. Discuss whether f is continuous as a function

1. from $(\mathbb{R}, d)$ to $(\mathbb{R}, d)$.

Fig 12



2. from $(\mathbb{R}, d')$ to $(\mathbb{R}, d)$.

SOLUTION: 1) আমরা জানি f-এর গ্রাফটা হবে Fig 12-এর মত (গ্রাফটা সবক্ষেত্রেই একই, metric-এর উপর নির্ভর করে না)। দেখাই যাচ্ছে যে এটা আঁকতে পেন তুলতে হয়, অতএব continuous নয়। এই যে বললাম "দেখাই যাচ্ছে", এর মানে হল Euclidean metric লাগাচ্ছি, কারণ আমাদের চোখে দেখা জ্যামিতির জগতে আমরা Euclidean metric নিয়েই কাজ করি। অবশ্য "দেখাই যাচ্ছে" বলে ছেড়ে না রেখে অংক কষে প্রমাণ করে দেওয়াই ভালো। প্রথমে অংকের ভাষায় লিখে নিই কী দেখাতে চাই। আমরা দেখাব continuous নয়, মানে continuous-এর সংজ্ঞার negation-টা লিখে শুরু করতে হবে। Continuous-এর সংজ্ঞাটা ছিল

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in N_d(a, \delta) \quad f(x) \in N_d(f(a), \epsilon).$$

এর negation নেবার জন্য $\forall$-গুলোকে $\exists$ আর $\exists$-গুলোকে $\forall$ করে দিতে হবে, আর সবশেষের $f(x) \in N_d(f(a), \epsilon)$-টাকে উল্টে $f(x) \notin N_d(f(a), \epsilon)$ করে দিতে হবে--

To Show

$\exists a \in \mathbb{R} \quad \exists \epsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in N_d(a, \delta) \quad f(x) \notin N_d(f(a), \epsilon).$

প্রথমেই আছে দুটো $\exists$. অতএব মাথা চুলকে খানিকটা ভাবতে হবে। এমন একটা a আন্দাজ করতে হবে যেখানে f-টা continuous নয়। Fig 12-এর গ্রাফটার দিকে এক ঝলক তাকালেই বুঝবে যেকোনো integer-কেই a হিসেবে নেওয়া যায়। ধরো আমরা নিলাম--

$\boxed{\exists a}$ Choose $a = 2$.

এবার ϵ নির্বাচন করতে হবে, মানে $a = 2$-তে $f(x)$ কতটা লাফ মারছে, সেটা আন্দাজ করতে হবে। ছবি থেকেই দেখছি লাফের পরিমাণ 1. সুতরাং ϵ নেওয়া চলবে 1 বা তার চেয়ে কম যেকোনো positive সংখ্যা।

$\boxed{\exists \epsilon}$ Choose $\epsilon = 1$.

$\boxed{\forall \delta}$ Take any $\delta > 0$.

এবার আছে $\exists x \in N_d(a, \delta)$. তার মানে এমন $x \in (2 - \delta, 2 + \delta)$ নিতে হবে যাতে $f(x)$ আর $f(2)$-র মধ্যে অন্ততঃ $\epsilon = 1$ ফাঁক থাকে। আবার গ্রাফের দিকে তাকাও। লক্ষ করো, $f(a) = [2] = 2$. যদি 2-এর ডানদিকে যাও, তবে $f(x)$ খানিকদূর পর্যন্ত সেই 2-ই থাকছে। কিন্তু বাঁদিকে গেলেই ঝপ্ করে একেবারে 1-এ নেমে যাচ্ছে। সুতরাং $x \in (2 - \delta, 2 + \delta)$ নিতে হবে 2-এর বাঁদিকে কোথাও। যা খুশি নেওয়া যায়। ধরো নিলাম--

$\boxed{\exists x}$ Choose $x = 2 - \frac{\delta}{2}$.

Then $f(x) = \left[2 - \frac{\delta}{2}\right] \leq 1$.

এখানে $= 1$ না লিখে ≤ 1 কেন লিখলাম, বুঝলে তো? আসলে $\delta > 0$ তো যা খুশি হতে পারে, এমন কি $\delta = 100$ হলেও আপত্তি নেই। সেক্ষেত্রে $x = 2 - \frac{\delta}{2} = -48$ আর $f(x) = -48$ হবে, যেটা 1-এর চেয়ে অনেক কম। সাবধান, অংকের দুনিয়ায় $\forall \delta > 0$ মানে যা খুশি $\delta > 0$ চলতে পারে, "ছোটো" হতে হবে, এমন কোনো মাথার দিব্যি কেউ দেয়নি!

So $f(x) \notin N_d(2, 1) = N_d(f(a), \epsilon)$, as required.

2) এবার দেখি domain-এর উপর discrete metric নিলে কী হয়। আশা করি মনে আছে যে, এই metric-এ সবাই অন্যদের থেকে 1 দূরত্বে থাকে। সুতরাং যদি 1 বা তার কম radius-এর open ball নাও, তবে তার মধ্যে centre-টুকু ছাড়া আর কিছুই থাকবে না, অর্থাৎ $\forall a \in \mathbb{R} \quad N_{d'}(a, 1) = \{a\}$. সুতরাং continuity-র সংজ্ঞায় $\delta = 1$ নিলে $x \in N_{d'}(a, \delta)$ হওয়া মানে $x = a$ হয়ে যাবে। তাই $f(x) = f(a) \in N_d(f(a), \epsilon)$ হবে। অতএব continuity ঠেকায় কে?

Shall show that f is continuous, ie,

$\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in N_{d'}(a,\delta) \quad f(x) \in N_d(f(a),\epsilon)$.

$\forall a$ Take any $a \in \mathbb{R}$.

$\forall \epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

এবার δ কী করে নেব, সে তো আগেই বলেছি।

$\exists \delta$ Choose $\delta = 1$.

$\forall x$ Take any $x \in N_{d'}(a,\delta)$.

Then $x = a$. So $f(x) = f(a) \in N_d(f(a),\epsilon)$, as required.

■

একই কায়দায় নীচের অংকগুলোকে ঘায়েল করো দেখি!

Exercise 6: Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be defined as $f(x) = [x]$, where $[x]$ denotes the largest integer $\leq x$. Let d denote the Euclidean metric and d' denote the discrete metric on $\mathbb{R}$. Discuss whether f is continuous as a function
(i) from $(\mathbb{R}, d)$ to $(\mathbb{R}, d')$. (ii) from $(\mathbb{R}, d')$ to $(\mathbb{R}, d')$. ■

Exercise 7: Let $f : X \to Y$ be any function, where X is a discrete metric space and Y is any metric space. Show that f must be continuous. ■

Exercise 8: Is it possible to have metric spaces (X, d_1) and (Y, d_2) such that a constant function $f : X \to Y$ is not a continuous function? ■

18.2 Domain আর codomain-এর restriction

এবার একটা ছোট্টো জিনিস আলোচনা করব, যেটা অনেক সময়ে কাজে লাগে। ধরো (X, d_1) আর (Y, d_2) দুটো metric space. তোমাকে একটা function দিলাম $f : X \to Y$. এখানে domain হল X, আর codomain হল Y. অনেক সময়ে domain বা codomain-টাকে সংকুচিত করতে হয়, ফলে নতুন যে function-টা পাওয়া যায়, তাকে অংকের ভাষায় বলে f-এর একটা **restriction**. একটা উদাহরণ দেখে নেওয়া যাক।

Example 6: ধরো $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ হল $f(x) = [x]$. যদি domain-টাকে সংকুচিত করে খালি $[0, 1)$ করে দিই, তবে f-এর restriction-টা কী হবে? Euclidean metric-এর সাপেক্ষে গোড়ার f-টা কী continuous ছিল? আর restriction-এর পরে?

SOLUTION: Fig 13 দেখলেই বোঝা যাচ্ছে যে, restriction-টা হবে $f(x) \equiv 0$, যেখানে $x \in [0, 1)$. এখানে $f(x) = [x]$ মোটেই continuous ছিল না, কিন্তু restriction-এর পরে দিব্যি continuous হয়ে গেছে। ■

Domain-কে সংকুচিত করা সহজ, যেকোনো nonempty subset-এই সংকুচিত করা যায়। কিন্তু codomain-এর বেলায় একটু সাবধান থাকতে হয়। নীচে অংকটা করলেই সেটা বুঝবে।

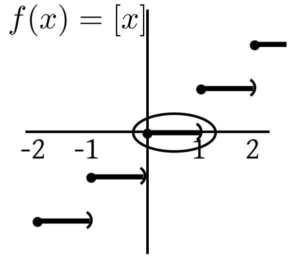


Fig 13

Example 7: আবার আগের উদাহরণের $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$-ই নিলাম। তুমি কি codomain-টাকে সংকুচিত করে $[0, 1)$ বানাতে পারবে?

SOLUTION: না, কারণ f-এর range হল $\mathbb{Z}$. কোনোভাবেই codomain-কে তার চেয়ে ছোটো করা সম্ভব নয়, কারণ তাহলে f-টা আর function-ই থাকবে না! ■

একটা function যদি continuous হয় (বা না হয়), তার ভিত্তিতে কি বলা যাবে-- তার কোনো restriction-ও continuous হবে (বা হবে না) কিনা? অনেক সময়েই বলা যায়। সেটা নিয়েই এবারের আলোচনা। একটা উদাহরণ তো দেখেইছো, একটা discontinuous function-এর domain-কে সংকুচিত করলে restriction-টা continuous হয়ে উঠতে পারে। একটা গুরুত্বপূর্ণ জিনিস হল--যদি মূল function-টা continuous হয়, তবে তার যেকোনো restriction-ই continuous হতে বাধ্য। সেটাই নীচের theorem-টার বক্তব্য।

THEOREM

Let (X, d_1) and (Y, d_2) be any two metric spaces. Let $f : X \to Y$ be a continuous function. Let $\phi \neq A \subseteq X$ and $B \subseteq Y$ be such that $f(A) \subseteq B$. Then $f : A \to B$ must be continuous.

Proof:

Shall show

$$\forall a \in A \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in N_A(a, \delta) \quad f(x) \in N_B(f(a), \epsilon).$$

প্রমাণটা নেহাতই খালি continuity-র সংজ্ঞার প্রয়োগ। মনে রাখার জিনিস কেবল এই যে, $N_A(a, \delta) = N_X(a, \delta) \cap A$ আর $N_B(f(a), \epsilon) = N_Y(f(a), \epsilon) \cap B$.

$\forall a, \epsilon$ Take any $a \in A$ and any $\epsilon > 0$.

$\because f : X \to Y$ is continuous, hence

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in N_X(a, \delta) \quad f(x) \in N_Y(f(a), \epsilon). \qquad (*)$$

$\exists \delta$ Choose this $\delta > 0$.

$\forall x$ Take any $x \in N_A(a, \delta)$.

Now $N_A(a, \delta) = N_X(a, \delta) \cap A$.

So $x \in N_X(a,\delta)$, and hence, by (*), $f(x) \in N_Y(f(a),\epsilon)$.
Also, since $x \in A$ and $f(A) \subseteq B$, hence $f(x) \in B$.
Thus, $f(x) \in N_Y(f(a),\epsilon) \cap B = N_B(f(a),\epsilon)$, as required.

[Q.E.D]

DAY 19
বিভিন্ন ধর্ম

আজকে আমরা continuous function-দের বিভিন্ন ধর্ম আলোচনা করব।

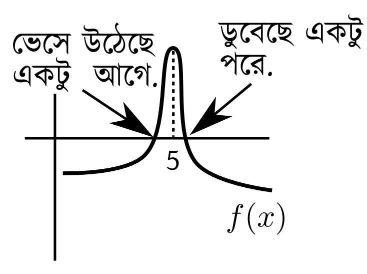
19.1 Sign preserving property

Real-valued continuous function-দের একটা গুণ হল sign-preserving property. এর সঙ্গে প্রথম পরিচয় সাধারণতঃ হয়ে থাকে real analysis শেখার সময়েই। প্রথমে সেটা একটু মনে করে নিই। ধরো বলে দিলাম $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ একটা continuous function, এবং $f(5)>0$. তোমাকে এরকম একটা function-এর গ্রাফ আঁকতে হবে। সেই সঙ্গে একটা বাড়তি শর্ত হল $x\neq 5$ হলে যেন $f(x)\leq 0$ হয়। পারবে আঁকতে? খানিকক্ষণ চেষ্টা করলেই দেখবে কাজটা করা যাচ্ছে না। কারণ $f(5)>0$ মানে $x=5$-এর গ্রাফটা x-axis-এর উপরে আছে। এদিকে আমরা চাইছি যে, অন্য সর্বত্র $f(x)\leq 0$, মানে গ্রাফটা অন্য কোথাও x-axis-এর উপরে উঠতে পারবে না। কিন্তু f যেহেতু continuous, তাই $x=5$-এ যদি x-axis-এর উপরে উঠতে হয়, তবে 5-এর খানিকটা আগে থেকে x-axis-এর উপরে ভেসে উঠতে হবে, এবং 5-এর পরে ফের টুপ্ করে x-axis-এর নীচে ডুব মারতে খানিকটা সময় তো নেবেই (Fig 14)। সুতরাং এমন একটা $\delta>0$ পেয়ে যাবে, যাতে পুরো $N(5,\delta)$-র উপরেই $f(x)>0$ থাকে। এইটাই ছিল real analysis-এ শেখা continuous function-এর sign preserving property. এমনধারা নাম হবার কারণ, কোনো $a\in\mathbb{R}$-এ $f(a)>0$ বা $f(a)<0$ হলে, a-র এমন একটা neighbourhood পাওয়া যাবে, যাতে তার সর্বত্রই $f(x)$-এর sign (মানে প্লাস নাকি মাইনাস) $f(a)$-র মতই হয়। এখানে প্রধান আলোচ্য বিষয় হল $f(x)$-এর sign, তাই f-এর codomain-টা $\mathbb{R}$-এর কোনো subset হতেই হবে। কিন্তু domain-টা যেকোনো metric space হতে পারে। তাও মূল ব্যাপারটা একই থাকবে। সেটাই নীচের theorem-টার বক্তব্য। পরে আমরা দেখব codomain-টাকেও অন্য কোনো metric space নিলে কী হবে।

THEOREM
Let (X,d) be any metric space. Also consider $\mathbb{R}$ with the Euclidean metric. Let $f:X\to\mathbb{R}$ be a function that is continuous at some $a\in X$. If $f(a)>0$(or <0) then

$$\exists\delta>0\quad\forall x\in N_X(a,\delta)\quad f(x)>0(\text{ or }<0).$$

Fig 14



Proof: আমরা প্রথমে $f(a) > 0$ কেসটা নিয়ে কাজ করি। একবার সেটা হয়ে গেলে $f(a) < 0$ কেসটা একইভাবে হবে, f-এর জায়গায় $-f$ নিয়ে।

Case 1: Let $f(a) > 0$. Shall show

$\exists\delta > 0 \quad \forall x \in N_X(a,\delta) \quad f(x) > 0.$

Let $\epsilon = \frac{f(a)}{2} > 0$.

Since $f(x)$ is continuous at $x = a$, hence $\exists\delta > 0 \quad \forall x \in N_X(a,\delta) \quad f(x) \in N_{\mathbb{R}}(f(a),\epsilon)$.

$\exists\delta$ Choose this $\delta > 0$.

$\forall x$ Take any $x \in N_X(a,\delta)$.

Then $f(x) > f(a) - \epsilon = f(a) - \frac{f(a)}{2} = \frac{f(a)}{2} > 0$, as required.

Case 2: If $f(a) < 0$, then we can apply case 1 to $-f(x)$.

[Q.E.D]

এখানে আমরা codomain-টাকে $\mathbb{R}$ নিয়েছিলাম। কিন্তু যদি codomain-টা অন্য কোনো metric space হয়, তাও এই theorem-টার একটা সংস্করণ সম্ভব--

THEOREM

Let (X,d_1) and (Y,d_2) be any two metric spaces. Let $f : X \to Y$ be any function continuous at some $a \in X$. Let $B \subseteq Y$ be any open set containing $f(a)$. Then

$$\exists\delta > 0 \quad \forall x \in N_X(a,\delta) \quad f(x) \in B.$$

যদি $Y = \mathbb{R}$ আর $B = (0,\infty)$ বা $(-\infty,0)$ নাও তবেই আগের theorem-টা ফিরে পাবে।

Proof: প্রমাণটা বস্তুতঃ continuous-এর সংজ্ঞাটা লাগানো ছাড়া আর কিছুই নয়।

To show

$\exists\delta > 0 \quad \forall x \in N_X(a,\delta) \quad f(x) \in B.$

$\because B$ is open in Y, and $f(a) \in B$,

$\therefore \exists\epsilon > 0 \quad N_Y(f(a),\epsilon) \subseteq B.$

$\because f : X \to Y$ is continuous at a,

$$\therefore \exists\delta > 0 \quad \forall x \in N_X(a,\delta) \quad f(x) \in N_Y(f(a),\epsilon). \qquad (*)$$

$\exists\delta$ Choose this $\delta > 0$.

$\forall x$ Take any $x \in N_X(a,\delta)$.

Then, by (*), $f(x) \in N_Y(f(a), \epsilon) \subseteq B$, as required.

[Q.E.D]

এই theorem-টা একটা গুরুত্বপূর্ণ জিনিসের জন্ম দেবে। তার জন্য preimage বলে একটা ধারণা জানলে সুবিধা হবে।

19.2 Image আর preimage

Fig 15-এ একটা function দেখিয়েছি, $f : X \to Y$. যদি জানতে চাই $f(1)$ কত, অমনি তুমি X-এর 1 থেকে বেরোনো তীরচিহ্নটা ধরে তার ডগায় পৌঁছে যাবে, যেখানে লেখা রয়েছে 4. সুতরাং উত্তর হবে $f(1) = 4$. এইভাবে f-টা X-এর প্রতিটা সদস্যকে Y-এর কোনো না কোনো সদস্যে গিয়ে নিয়ে ফেলে। একইরকম ব্যাপার করা যায় X-এর subset-দের নিয়েও। ধরো $A \subseteq X$ নিলাম $A = \{1, 2, 3\}$ তবে $f(A)$ বার করার জন্য সেই সব তীরচিহ্ন দেখতে হবে, যারা A-তে শুরু হয়েছে। এই সব তীরচিহ্নর ডগাগুলো নিয়েই $f(A)$ তৈরী হবে, মানে এখানে $f(A) = \{4, 5\}$. বোঝার জন্য Fig 16 দেখে নাও। এই $f(A)$-র একটা পোশাকি নাম আছে, একে বলে A-র **image** under f.
যদি এর উল্টো কাজটা করতাম, মানে তীরচিহ্নগুলোর ডগা থেকে আরম্ভ করে গোড়ায় যেতাম, তবে পেতাম **preimage**. এক্ষেত্রে অবশ্য শুরু করতে হবে Y-এর কোনো subset থেকে। একটা উদাহরণ হল $B = \{1, 2, 3\}$. আমাদের কাজ হল B-এর preimage বার করা। এর জন্য সেই সব তীরচিহ্ন নাও, যারা B-এ গিয়ে শেষ হয়েছে। এই সব তীরচিহ্নের গোড়াগুলো মিলে X-এর যে subset-টা পাবে, সেটাই হল B-এর preimage. ছবিতে দেখিয়েছি Fig 17-এ। একে অংকের ভাষায় লেখে $f^{-1}(B)$. এখানে f-র মাথায় ওই $^{-1}$-টা দেখে ভেবো না যেন f-কে invert করা হচ্ছে। Invert করা সম্ভব হবে একমাত্র তখনই যখন f হবে one-one এবং onto. কিন্তু যখন $f^{-1}(\cdots)$-এর পেটের ভিতরে codomain-এর কোনো subset থাকবে, তখন বুঝবে invert করার কথা হচ্ছে না, কথা হচ্ছে preimage-এর।
এবার image আর preimage-এর সংজ্ঞা অংকের ভাষায় লিখে রাখি--

> **DEFINITION: Image and preimage**
>
> Let $f : X \to Y$ be any function. Let $A \subseteq X$ and $B \subseteq Y$. Then the **image** of A under f is defined as
> $$f(A) = \{f(x) \in B \;:\; x \in A\},$$
> and the **preimage** of B under f is defined as
> $$f^{-1}(B) = \{x \in A \;:\; f(x) \in B\}.$$

কয়েকটা উদাহরণ দেখে নাও।

Example 8: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ যদি $f(x) = x^2$ হয়, তবে $f([0, 2])$, $f([-1, 2])$ এবং $f(\{-1, 1\})$ বার করো। এছাড়া

Fig 15

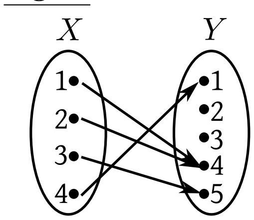


Fig 16

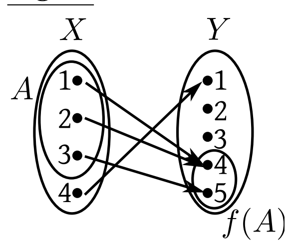
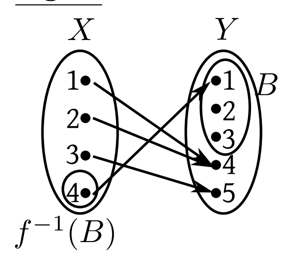


Fig 17



$f^{-1}([0,4])$, $f^{-1}([0,4))$, $f^{-1}((0,4])$, $f^{-1}([-1,4])$ এবং $f^{-1}([-1,0))$-ও বার করো।
SOLUTION:

$$\begin{aligned} f([0,2]) &= [0,4] \\ f([-1,2]) &= [0,4] \\ f(\{-1,1\}) &= \{1\} \\ f^{-1}([0,4]) &= [-2,2] \\ f^{-1}([0,4)) &= (-2,2) \\ f^{-1}((0,4]) &= [-2,0)\cup(0,2] \\ f^{-1}([-1,4]) &= [-2,2] \\ f^{-1}([-1,0)) &= \phi. \end{aligned}$$

একেবারে শেষের জিনিসটা কী করে হল বুঝেছো তো? যেহেতু কোনো real সংখ্যারই square কখনও < 0 হতে পারে না, সেই কারণে preimage-টার মধ্যে কিছুই নেই। ■

Image এবং preimage, এই দুটো জিনিসের মধ্যে preimage-এর আচরণ বেশী "ভদ্র"। এই কথার মানেটা নীচের অংক দুটো করলেই মালুম হবে। এই অংক দুটো কিন্তু বাদ দিয়ে যেও না, কারণ preimage-এর "ভদ্র" আচরণ আর image-এর "অভদ্র" আচরণ, এই দুয়ের সঙ্গেই পরিচয় থাকা ভালো। প্রথমে "অভদ্রতা" দিয়ে শুরু করি।

Exercise 9: Fig 18-এ একটা $f : X \to Y$ দেখিয়েছি। আমরা খুব খুশি হতাম যদি যেকোনো $A, B \subseteq X$-এর জন্যই

1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ হত।
2. $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ হত।
3. $f(A^c) = \big(f(A)\big)^c$ হত। এখানে A^c নেওয়া হচ্ছে X-এর মধ্যে, আর $\big(f(A)\big)^c$ নেওয়া হচ্ছে Y-এর মধ্যে।

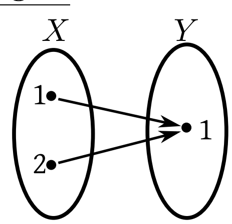
দুঃখের কথা এর মধ্যে দুটো জিনিস সবসময়ে ঠিক নাও হতে পারে। $A = \{1\}$ আর $B = \{2\}$ নিয়ে চিন্তা করে বলো তো কোন্ দুটো? অন্যটাকে প্রমাণ করো। ■

এবার "ভদ্র" আচরণের পরিচয় পাবে নীচের অংকটায়।

Exercise 10: যদি $f : X \to Y$ যা খুশি function হয়, আর $A, B \subseteq Y$ যা খুশি দুটো subset হয়, তবে দেখাও যে--

1. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
2. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

Fig 18



3. $f^{-1}(A^c) = \left(f^{-1}(A)\right)^c$.

■

এই অংক দুটোয় কোনো metric space-এর গল্প নেই। যদি metric space নিয়ে কাজ করি, তবে preimage-এর আরো একটা গুরুত্বপূর্ণ "ভদ্র" আচরণ আছে, যেটা দিলাম নীচের theorem-টায়। যদি তুমি আমাদের "বাংলায় বোঝানো ইংরাজী বই" সিরিজের Real Analysis পড়ে থাকো, তবে সেখানেও এই ব্যাপারটার উল্লেখ দেখবে।

THEOREM

Let $(X, d_1), (Y, d_2)$ be two metric spaces. Let $f : X \to Y$ be any continuous function. Let $B \subseteq Y$ be any open (or closed) subset of Y. Then $f^{-1}(B)$ must be open (or closed) in X.

Proof: প্রমাণটা ভীষণ জটিল কিছু নয়। দুভাগে ভেঙে করি, একবার open-এর জন্য তারপর closed-এর জন্য।

Step 1: Let B be open in Y.

কী দেখাতে হবে, অংকের ভাষায় লিখে নিই--

To show $f^{-1}(B)$ is open in X, ie

$\forall a \in f^{-1}(B) \quad \exists \delta > 0 \quad N_X(a, \delta) \subseteq f^{-1}(B)$.

$\forall a$ Take any $a \in f^{-1}(B)$.

এবার একটা $\delta > 0$ খুঁজতে হবে।

Then $f(a) \in B$.

$\because B$ is open in Y, $\therefore \exists \epsilon > 0 \quad N_Y(f(a), \epsilon) \subseteq B$.

$\because f$ is continuous, $\therefore \exists \delta > 0 \quad \forall x \in N_X(a, \delta) \quad f(x) \in N_Y(f(a), \epsilon)$.

$\exists \delta$ Choose this $\delta > 0$.

Then $\forall x \in N_X(a, \delta) \quad f(x) \in N_Y(f(a), \epsilon) \subseteq B$.

So $\forall x \in N_X(a, \delta) \quad f(x) \in B$.

So $\forall x \in N_X(a, \delta) \quad x \in f^{-1}(B)$.

So $N_X(a, \delta) \subseteq f^{-1}(B)$, as required.

এবার closed-এর জন্য প্রমাণটা করা যাক। নতুন কিছু করব না। Complement নিয়ে open করে প্রথম ধাপটাই ফের লাগিয়ে দেব।

Step 2: If B is closed in Y, then B^c is open in Y.

So, by step 1, $f^{-1}(B^c)$ is open in X.

Now, $f^{-1}(B^c) = \left(f^{-1}(B)\right)^c$.

⟦ Because:

$x \in f^{-1}(B^c) \iff f(x) \in B^c \iff f(x) \notin B \iff x \in \left(f^{-1}(B)\right)^c$.

⟧

Hence $\left(f^{-1}(B)\right)^c$ is open in X, and so $f^{-1}(B)$ is closed in X, as required.

[Q.E.D]

এই theorem-টা ব্যবহার করে অনেক সময়ে কোনো metric space-এর কোনো set-কে সহজে open বা closed দেখানো যায়, পরিচিত অন্য কোনো metric space ব্যবহার করে। একটা উদাহরণ দেখাই। তার জন্য linear algebra থেকে একটা ভাষা লাগবে--**singular**. এর মানেটা একটু মনে করিয়ে দিই। একটা square matrix-কে singular বলা মানে সেই matrix-টার determinant হল শূন্য, যেমন $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ একটা singular matrix, কারণ এর determinant হল $1 \times 4 - 2 \times 2 = 0$.

Example 9: Consider the metric space of all $n \times n$ real matrices with the Euclidean metric

$$d(A, B) = \sqrt{\sum_{ij} (a_{ij} - b_{ij})^2}.$$

Show that the set S consisting of all singular matrices is a closed set in this metric space.
SOLUTION: আমরা আগের একটা অংকেই[2] বলেছিলাম এই metric space-টা আসলে $\mathbb{R}^{n^2}$-এর একটা রূপভেদ। অতএব S-কে আমরা $\mathbb{R}^{n^2}$-এর একটা (জটিল) subset বলে ভাবতে পারি। এরকম জটিল subset-দের নিয়ে কাজ করার সময়ে আমাদের পরিচিত $\mathbb{R}$-এর সঙ্গে এই metric space-টার একটা যোগসূত্র পাওয়া গেলে সুবিধা হয়। এরকম একটা যোগসূত্র হল determinant, যেটা হল এই metric space থেকে $\mathbb{R}$-এ একটা function. আগেই বলেছি যে, যেহেতু এই function-এ খালি যোগ আর গুণ ব্যবহার করা হয়েছে, তাই এটা একটা continuous function হবে। আমরা জানি যে, singular মানে determinant হল 0. তাই যাবতীয় singular matrix-দের set হল $\{0\}$-র preimage, অর্থাৎ যদি function-টার নাম দিই f, তবে $S = f^{-1}(\{0\})$. যেহেতু $\{0\}$ হল $\mathbb{R}$-এর মধ্যে closed, আর f হল continuous, তাই S-ও closed হতে বাধ্য। ■

Exercise 11: বলো তো আগের অংকে যদি যাবতীয় nonsingular matrix-দের set নিতাম, তবে সেই set-টা কি open হত? ■

Exercise 12: Consider $C[0, 1]$, the space of all continuous functions from $[0, 1]$ to $\mathbb{R}$ under the sup-metric. Show that the set of all functions f such that $f(0) \geq 0$ is closed in this metric space.

[2] Example 4. সেটা খুঁজে পাবে 133 নম্বর পাতায়, বা তারই কাছাকাছি কোথাও।

HINT: এই function-টা নাও, $F : C[0,1] \to \mathbb{R}$, যেখানে $F(f) = f(0)$. যেমন $f(x) = \sin x$ হলে $F(f) = \sin 0 = 0$ আবার $f(x) = e^x$ হলে $F(f) = e^0 = 1$, এইরকম। এই $F(\cdot)$-টা যে continuous, সেটা আমরা আগেই[3] দেখিয়েছি। এবার preimage দিয়ে চিন্তা করো। ■

Exercise 13: দেখাও যে, $\mathbb{R}^2$-র মধ্যে unit circle-টা, মানে $\{(x,y) \ : \ x^2+y^2=1\}$ হল একটা closed set. এখানে Euclidean metric নিয়ে কাজ করছি। ■

Exercise 14: আচ্ছা, ধরো (X,d_1) আর (Y,d_2) দুটো metric space আর $f : X \to Y$ হল একটা continuous function. যদি $B \subseteq Y$ একটা open set হয়, তবে আমরা দেখেছি যে $f^{-1}(B)$-টা X-এর মধ্যে open হতে বাধ্য। কিন্তু যদি B-টা open না হত, তবেও কি $f^{-1}(B)$ কোনোক্ষেত্রে open হতে পারে?
HINT:
নানাভাবে চিন্তা করা যায়। একটা কায়দা হল f-কে constant function নেওয়া। আরেকটা কায়দা হল (X,d_1)-কে discrete metric space নেওয়া। ■

19.3 Limit

Real analysis শেখার সময়ে দেখেছ যে, continuity-র সঙ্গে ওতপ্রোতভাবে জড়িত থাকে limit-এর ধারণা। Metric space-এর বেলাতেও ঠিক তাই। সংজ্ঞাটাও একেবারে real analysis থেকে কেটে বসিয়ে দেওয়া--

DEFINITION: Limit

Let $(X,d_1),(Y,d_2)$ be two metric spaces. Let $A \subseteq X$ be any nonempty set. Let $b \in X$ be any limit point of A in X. Let $f : A \to Y$ be any function. We say that $\ell \in Y$ is limit of $f(x)$ as $x \to b$, if

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in N'_X(b,\delta) \cap A \quad f(x) \in N_Y(\ell,\epsilon).$$

Here $N'_X(\cdot,\cdot)$ is a deleted ball in (X,d_1) and $N_Y(\cdot,\cdot)$ is a ball in (Y,d_2).

এখানে দুটো জিনিস মনে রেখো--

- এক, আমরা b-কে A-র limit point নিয়েছি। কারণ limit নেবার জন্য আমাদেরকে b-এর খুব কাছাকাছি সব x-এর জন্য $f(x)$ বার করতে হবে। এদিকে $x \in A$ না হলে তো $f(x)$ বারই করা যাবে না। সেই কারণে আমাদের দরকার যেন A-র ভিতর দিয়ে b-এর যত খুশি কাছে পৌঁছনো যায়। সেই জন্যই এই limit point শর্তটা।

- দুই, আশা করি deleted neighbourhood-এর সংজ্ঞা ভুলে যাও নি--

$$N'_X(b,\delta) = N_X(b,\delta) \setminus \{b\},$$

  মানে $N_X(b,\delta)$ থেকে b-টা বাদ।

[3] যদি ভুলে গিয়ে থাকো, তবে 129 নম্বর পাতার ধারেকাছে চলে যাও, Example 2 দেখলেই মনে পড়ে যাবে।

এখানে একটা ব্যাপারে সাবধান--real analysis-এ আমরা left hand limit, right hand limit, $\lim_{x\to\infty}$ ইত্যাদি নিয়ে আলোচনা করে থাকি। এ সবের জন্যই $\mathbb{R}$-এর বিভিন্ন সংখ্যাকে $<, \leq, >, \geq$ ইত্যাদি দিয়ে তুলনা করতে হয়। যেহেতু সব metric space-এ এই ছোটো-বড়োর ধারণাটা নাও থাকতে পারে, তাই আমরা $\mathbb{R}$ ছাড়া অন্য কোনো metric space-এর বেলায় left hand limit ইত্যাদি নিয়ে আলোচনা করি না।
নীচের theorem-টা হায়ার সেকণ্ডারী থেকেই আমাদের পরিচিত। বস্তুতঃ সেখানে এটাকেই আমরা continuous-এর সংজ্ঞা ধরি। অবশ্যই সেখানে আমরা $\mathbb{R}$ (বা তার মধ্যে কোনো interval) নিয়ে কাজ করতাম। সেই কারণে limit point শর্তটা আলাদা করে বলতে হত না।

THEOREM

Let $(X, d_1), (Y, d_2)$ be two metric spaces. Let $A \subseteq X$. Let $f : A \to Y$ be any function. Let $a \in A$ be a limit point of A. Then f is continuous at a if and only if $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

প্রমাণটা একেবারেই এক লাইনের। তোমার করার জন্য রেখে দিলাম। খালি ওই limit point শর্তটা বাদ দিলে কীরকম বিভ্রাট হতে পারে, তার একটা উদাহরণ দেখাই।

Exercise 15: ধরো $f : (0, 1) \cup \{2\} \to \mathbb{R}$ হল $f(x) = x$. আমরা Euclidean metric নিয়ে কাজ করব। অতএব f-টা অবশ্যই continuous function। হ্যাঁ $x = 2$-তেও f-টা continuous হবে। সেটা অংকের ভাষায় লিখে প্রমাণ করো দেখি। এবার বলো তো $\lim_{x\to 2} f(x)$ কত হবে। ■

DAY 20
Uniform continuity

Real analysis-এ আমরা uniform continuity-র কথা শিখেছিলাম। একই জিনিস metric space-এও খাটে। ব্যাপারটা একটু মনে করে নিই। অংকে অনেক সময়েই $\forall$-এর পরে $\exists$ থাকে। একটা উদাহরণ আমাদের continuity-র সংজ্ঞাটাই--

$$\forall a \in X \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in N_X(a, \delta) \quad f(x) \in N_Y(f(a), \epsilon).$$

এখানে দুটো $\forall$-এর পরে একটা $\exists$, এবং তারপরে আবার একটা $\forall$ রয়েছে। এরকমক্ষেত্রে $\exists$-এর δ-টা আগের $\forall$ দুটোর a এবং ϵ-এর উপর নির্ভর করতে পারে। অর্থাৎ যদি তোমাকে কোনো বিশেষ একটা $a \in X$ আর $\epsilon > 0$ দিই, তবে তার জন্য তুমি যে $\delta > 0$ পাবে, সেটা অন্য কোনো $a \in X$ আর $\epsilon > 0$-র বেলায় নাও কাজ করতে পারে। এই ব্যাপারটা যদি বুঝতে অসুবিধা হয়, তবে একটা সহজ ছবির উদাহরণ দিয়ে বুঝে নেওয়া যাক।

Example 10:

Fig 19-এ দুটো set দেখানো আছে, একটা হল A, কিছু মানুষের set, আর অন্যটা হল B কিছু "খাদ্যের" set. তীরচিহ্ন দিয়ে দেখিয়েছি কে কোন্‌টা খায়। একইরকম একটা জিনিস আছে Fig 20-তেও। আমি অংকের ভাষায় দুটো বাক্য দিচ্ছি--

সবে হল খাওয়া শুরু, শোনো শোনো আরো খায়--
সূদ খায় মহাজনে, ঘুষ খায় দারোগায়।
বাবু যান হাওয়া খেতে চড়ে জুড়ি-গাড়িতে
খাসা দেখো 'খাপ খায়' চাপকানে দাড়িতে।
--খাই খাই (সুকুমার রায়)

1. $\forall a \in A \quad \exists b \in B \quad a$ খায় b-কে.
2. $\exists b \in B \quad \forall a \in A \quad a$ খায় b-কে.

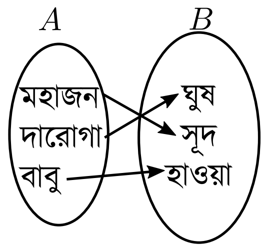


Fig 19

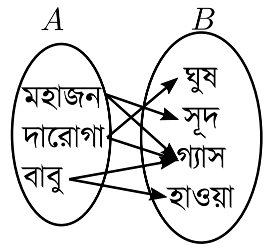


Fig 20

তোমাকে বলতে হবে ছবি দুটোর জন্য কোন্ কোন্ বাক্য ঠিক আর ভুল।

SOLUTION: প্রথম বাক্যটার মানে হল প্রতিটা মানুষই কিছু না কিছু খায়। একবার Fig 19-এর দিকে দেখলেই বুঝবে কথাটা এখানে ঠিক, সকলেই কিছু না কিছু খায়। সে কথাটা অবশ্য Fig 20-র ক্ষেত্রেও সত্য। এখানে কে কী খাচ্ছে, সেটা তার উপরে নির্ভর করতে পারে। তবে এমন কোনো "খাদ্য" সুকুমার রায় উল্লেখ করেন নি, যেটা সকলেই খায়। সুকুমারের এই গাফিলতিই চোখে আঙুল দিয়ে দেখাতে চাইছে দ্বিতীয় বাক্যটা। এখানে $\exists$-টা চলে এসেছে $\forall$-এর আগে, মানে প্রথমে এমন একটা "খাদ্য" নির্বাচন করতে হবে, যেটা সকলেই খায়। Fig 19-এর বেলায় সেটা করা যাচ্ছে না, অতএব দ্বিতীয় বাক্যটা এখানে ভুল। কিন্তু Fig 20-র বেলায় সত্যিই এরকম একটা "খাদ্য" আছে, কারণ দেখা যাচ্ছে যে সকলেই গ্যাস খায়[4]। তাই এখানে দ্বিতীয় বাক্যটাও ঠিক। ■

আবার continuity-র গল্পে ফিরে আসি। একটা উদাহরণ দিচ্ছি নীচে।

Example 11: যদি $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ হয় $f(x)=x^2$, তবে আমরা জানি যে f একটা continuous function. অতএব--

$$\forall a\in\mathbb{R}\quad \forall\epsilon>0\quad \exists\delta>0\quad \forall x\in N(a,\delta)\quad f(x)\in N(f(a),\epsilon).$$

যদি $a=1$ এবং $\epsilon=\frac{1}{2}$ দিই, তবে একটা উপযুক্ত δ দাও দেখি। যদি $\epsilon=\frac{1}{100}$ নিতাম, তবে কি সেই একই δ দিয়ে কাজ চলত? যদি $\epsilon=1$ রেখে $a=100$ নিতাম, তবে?

SOLUTION: Fig 21 দেখলেই বুঝবে যে, $\sqrt{1+\frac{1}{2}}-1=0.2247...$-এর চেয়ে ছোটো যেকোনো $\delta>0$ নিলেই কাজ চলবে। ধরো আমরা $\delta=0.2$ নিলাম।

যদি $\epsilon=\frac{1}{100}$ নিই, তবে আর এই δ দিয়ে কাজ হত না, কারণ যদি $1+\frac{\delta}{2}=1.1$ নিই, তবে সেটা 1-এর থেকে $<\delta$ দূরত্বে আছে বটে, কিন্তু $f(1.1)-f(1)>\epsilon$ হয়ে যাচ্ছে।

আবার $a=100$ নিলেও সমস্যা হত, কারণ 100.1 আছে 100-র থেকে $<\delta$ দূরত্বে, অথচ $f(100.1)-f(100)=100.1^2-100^2>\epsilon$ হয়ে যাচ্ছে, কারণ $a=100$-এর জায়গাটায় $f(x)$-এর গ্রাফটা বেজায় খাড়া। ■

কিন্তু কোনো কোনো function-এর ক্ষেত্রে δ-টাকে এমনভাবে নেওয়া যায়, যাতে সব a-র জন্যই একই δ কাজ করে, অর্থাৎ δ-টা ϵ-এর উপরে নির্ভর করলেও a-র উপরে করে না। এরকম একটা উদাহরণ দেখি।

Example 12: এবার $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ নেব $f(x)=x$. এবার যদি $\epsilon=\frac{1}{2}$ আর $a=1$ দিই, তবে একটা উপযুক্ত δ দাও।

এবার বলো তো এই δ-টা কি যেকোনো $a\in\mathbb{R}$-এর জন্যই কাজ করবে? Fig 22 দেখলে সুবিধা হতে পারে।

SOLUTION: এখানে $\delta=\frac{1}{2}$ নিলেই চলবে। হ্যাঁ, যেকোনো $a\in\mathbb{R}$-এর জন্যই কাজ করবে এই δ-টা, কারণ গ্রাফটা সর্বত্রই একইভাবে হেলে আছে, আর খাড়া হচ্ছে না। ■

---

[4]যদিও সুকুমার রায় সে কথা তাঁর কবিতায় লিখে যান নি!

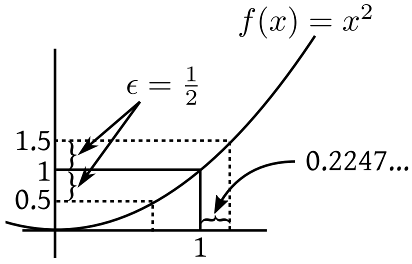


Fig 21

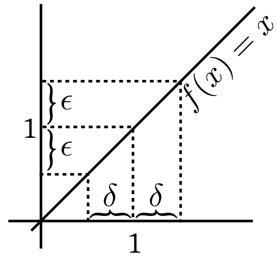


Fig 22

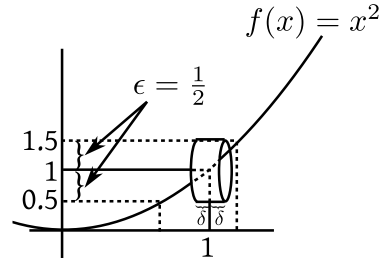


Fig 23

যেসব continuous function-এর বেলায় δ-টা খালি ϵ-এর উপরে নির্ভর করে, কিন্তু a-র উপর করে না, তাদেরকে বলে **uniformly continuous**. সংজ্ঞাটা লিখে ফেলা খুবই সহজ, একেবারে continuous-এর সংজ্ঞাটাই, খালি $\forall a \in X$-টা চলে যাবে $\exists \delta > 0$-র পরে।

DEFINITION: **Uniform continuity**

Let (X, d_1) and (Y, d_2) be any two metric spaces. Let $f : X \to Y$ be a function. We say that f is **uniformly continuous** if

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall a \in X \quad \forall x \in N_X(a, \delta) \quad f(x) \in N_Y(f(a), \epsilon).$$

বলাই বাহুল্য যে, একটা function যদি uniformly continuous হয়, তবে সেটা continuous হতেও বাধ্য!
যদি একটা function দিয়ে পরীক্ষা করতে বলে সেটা uniformly continuous কিনা, তবে কী করবে? যদি function-টা $\mathbb{R}$ থেকে $\mathbb{R}$-এ হয়, তবে একটা পথ হল তার গ্রাফটা কল্পনা করে মনে মনে তার উপরে "আংটি বোলানো"। বিশদ করে বলি। একটু আগে আমরা $f(x) = x^2$-এর গ্রাফে $a = 1$-এ $\epsilon = 1$-এর জন্য $\delta = 0.2$ নিয়েছিলাম। এইটাকেই গ্রাফের গায় একটা আংটি পরানো বলে ভাবতে পারো (Fig 23)। আংটির radius হল ϵ আর চওড়া হল δ. যদি গ্রাফটাকে লোহার তার দিয়ে তৈরী ভাবো, তবে সেই তারটা আংটির ভিতর দিয়ে স্বচ্ছন্দে গলে যাচ্ছে। আমরা আরো দেখেছিলাম যে, $a = 100$ নিলে ওই একই ϵ-এর জন্য আগের δ আর কাজ করছে না, মানে আংটিটাকে ডানদিকে সরাতে গেলে $a = 100$ আসার আগেই আংটিটা গ্রাফের গায় আটকে যাচ্ছে (Fig 24)। মনে রেখো, আংটিটাকে হেলানোও চলবে না কিন্তু। যদি $f(x) = x$ নিয়ে কাজ করো, তবে কিন্তু কোথাও আটকাবে না, তাই সেটা uniformly continuous হচ্ছে (Fig 25)।
দুঃখের কথা, সব metric space-এর বেলায় গ্রাফ আঁকার সুবিধাটা নেই। সেখানে অনেক সময়ে অন্য আরেকটা কৌশল কাজ করে। একটা উদাহরণ নিয়ে দেখা যাক।

Example 13: $C[0, 1]$-এর সঙ্গে আগেই পরিচয় হয়েছে, $[0, 1]$ থেকে $\mathbb{R}$-এ যাবতীয় continuous function-এর set. এর উপরে metric-টা দিলাম sup-metric. আমরা $F : C[0, 1] \to \mathbb{R}$ নেব $F(f) = f(0)$. এই $F(\cdot)$-টা কি uniformly continuous?
SOLUTION: কোনো function-কে uniformly continuous কিনা পরীক্ষা করার আগে অবশ্যই দেখে নেবে সেটা আদৌ continuous কিনা। সেটাই যদি না হয় তো uniformly continuous আর হবে কী করে! আমাদের function-টা যে continuous, সেটা আমরা আগেই দেখিয়েছিলাম, সেখানে ϵ আর কোনো $f \in C[0, 1]$ দেওয়া থাকলে কী করে δ বার করেছিলাম, মনে আছে? স্রেফ $\delta = \epsilon$ নিয়েছিলাম, কারণ যদি $d(f, g) < \epsilon$ হয়, তবে $\sup |f(x) - g(x)| < \epsilon$, অর্থাৎ $\forall x \in [0, 1] \quad |f(x) - g(x)| < \epsilon$. তাই $|f(0) - g(0)|$-ও $< \epsilon$ হতে বাধ্য, অর্থাৎ $|F(f) - F(g)| < \epsilon$.
লক্ষ করো, δ-র নির্বাচনে f-টা কোনো ভূমিকা পালন করেনি, অতএব $F(\cdot)$ অবশ্যই uniformly continuous হবে। ■

এই অংকে যেটা আমাদের বাঁচালো, সেটা হল $|F(f) - F(g)| \leq d(f, g)$. এটা ব্যবহার করেই আমরা চট্ করে ϵ থেকে δ বার করতে পারলাম। এই থেকেই নীচের সংজ্ঞাটার জন্ম।

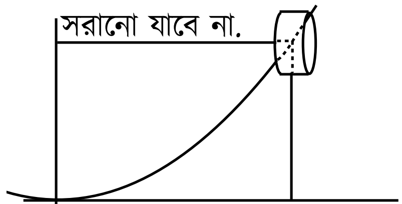


Fig 24

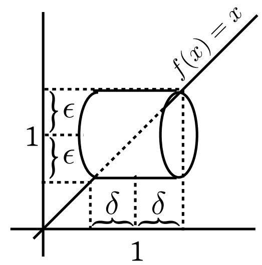


Fig 25

DEFINITION: **Lipschitz function**

Let (X, d_1) (Y, d_2) be metric spaces. A function $f : X \to Y$ is called a **Lipschitz function** if

$$\exists K > 0 \quad \forall x, x' \in X \quad d_2(f(x), f(x')) \leq K \cdot d_1(x, x').$$

The K is called a **Lipschitz constant**.

এক্ষুণি আমরা যে $F : C[0,1] \to \mathbb{R}$-এর উদাহরণ দিলাম, সেটা Lipschitz ছিল ($K = 1$)। আশা করি বুঝতে পারছ যে, Lipschitz function-রা uniformly continuous হবেই। এটাই নীচের theorem-টার বক্তব্য।

THEOREM

Let (X, d_1) and (Y, d_2) be two metric spaces, and let $f : X \to Y$ be a Lipschitz function. Then f must be uniformly continuous.

প্রমাণটা অংকের ভাষায় গুছিয়ে লেখার দায়িত্ব তোমাকেই দিলাম। যদি Lipschitz constant-টা K হয়, তবে $\delta = \frac{\epsilon}{K}$ নিলেই যে চলবে, সেটা নিশ্চয়ই বুঝতে পারছ?

Exercise 16: আমরা আবার এখানে $C[0,1]$-এর উপরে sup-metric নিয়ে কাজ করব। দেখাও যে এই $F : C[0,1] \to \mathbb{R}$-টা uniformly continuous.

$$F(f) = \int_0^1 f(x)dx.$$

■

এবার একটা উদাহরণ দেখি যেখানে একটা function-কে uniformly continuous নয় দেখাতে হবে।

Example 14: দেখাও যে $F : C[0,1] \to \mathbb{R}$ মোটেই uniformly continuous নয়, যেখানে

$$F(f) = f(1)^2.$$

SOLUTION: আমরা শুরু করব uniformly continuity-র সংজ্ঞার negation-টা নিয়ে--

Shall show

$\exists \epsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists f \in C[0,1] \quad \exists g \in N_{C[0,1]}(f,\delta) \quad |F(f) - F(g)| \geq \epsilon.$

এখানে তিনটে $\exists$ আছে, মানে বেশ কিছুটা রাফ করতে হবে। আমরা প্রথমে খুব সহজ চেহারার $f, g \in C[0,1]$ নিয়ে কাজ করার চেষ্টা করব। সবচেয়ে সহজ চেহারা হল constant function. যদি $f(x) \equiv c_1$ আর $g(x) \equiv c_2$ হয়, তবে $d(f,g) = |c_1 - c_2|$. এবং $|F(f) - F(g)| = |c_1^2 - c_2^2|$. সুতরাং আমরা চেষ্টা করব এমন $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ পেতে, যাতে $|c_1 - c_2| < \delta$ হয়, অথচ $|c_1^2 - c_2^2| \geq \epsilon$ হয়। আমরা $c_2 = c_1 + \frac{\delta}{2}$ নিই, তবে $|c_1 - c_2| < \delta$ শর্তটা নিয়ে চিন্তা থাকে না, আর খালি c_1 বার করতে পারলেই হবে। দেখা যাক $|c_1^2 - c_2^2|$ কত হয়--

$$|c_1^2 - c_2^2| = \cdots = \left|\delta c_1 + \tfrac{\delta^2}{4}\right|.$$

একটু তাকালেই বুঝবে যে, c_1-কে বাড়িয়ে গেলেই এটাকে যত খুশি বড় করা যাবে। সুতরাং যা ইচ্ছে $\epsilon > 0$ নেওয়া যায়, খালি তার সঙ্গে তাল রেখে c_1-কে যথেষ্ট বড় নিতে হবে। মনে রেখো, c_1-এর নির্বাচন আমাদের হাতে। যদি $c_1 > 0$ নিই, তবে ওই absolute value-টা নিয়ে চিন্তা করতে হয় না। খালি দরকার যেন $\delta c_1 + \frac{\delta^2}{4} \geq \epsilon$ হয়, মানে $c_1 \geq \frac{1}{\delta}\left(\epsilon - \frac{\delta^2}{4}\right)$. তা আমরা $\epsilon = 1$ আর $c_1 = \frac{1}{\delta}\left(1 - \frac{\delta^2}{4}\right)$ নেব। খানিকটা কাটাকাটি করলে পাবে $c_1 = \frac{1}{\delta} - \frac{\delta}{4}$. সেক্ষেত্রে $c_2 = c_1 + \frac{\delta}{2} = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{4}$ হচ্ছে। এবার তবে সব কিছু গুছিয়ে লিখে ফেলি--

$\exists\epsilon$ Choose $\epsilon = 1$.

$\forall\delta$ Take any $\delta > 0$.

এবার সেই c_1 আর c_2-র খেলা--

$\exists f$ Choose $f(x) \equiv \frac{1}{\delta} - \frac{\delta}{4}$.

$\exists g$ Choose $g(x) \equiv \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{4}$.

Then $d(f,g) = \frac{\delta}{2} < \delta$, and hence $g \in N_{C[0,1]}(f,\delta)$.

Also, $|F(f) - F(g)| = \cdots == 1 \geq \epsilon$, as required.

■

এই অংকটা হয়তো তোমার একটু জটিল লাগল। এরপর আমরা sequential criterion বলে একটা জিনিস শিখব, সেটা দিয়ে কোনো function-কে uniformly continuous নয় দেখানোটা খানিকটা সহজ হয়। কিন্তু সেই কায়দাটা শেখার আগে দ্যাখো তো নীচের অংকটা করতে পারো কিনা।

Exercise 17: Consider the function $F : C[0,1] \to \mathbb{R}$ given by

$$F(f) = \int_0^1 f(x)^2 dx.$$

Here $C[0,1]$ is equipped with the sup-metric. Is $F(\cdot)$ uniformly continuous? Justify your answer.
■

DAY 21
Sequential criterion

21.1 Continuous-এর জন্য

আমরা জানি যে, $f(x)$-এর পক্ষে $x = a$-তে continuous হওয়া মানে--

> x যদি a-র খুব কাছে থাকে, তবে $f(x)$ থাকবে $f(a)$-র খুব কাছে।

সুতরাং যদি $\{x_n\}_n$ এমন একটা sequence নাও, যাতে $x_n \to a$ হয়, তবে $f(x_n) \to f(a)$ হবে, সেটাই স্বাভাবিক। মজার কথা হচ্ছে, এর উল্টো দিকটাও খাটে, অর্থাৎ--

> ধরো $f(x)$-টা $x = a$-তে continuous কিনা সেসব কিছু বলে দেওয়া নেই, খালি বলেছে যে যাই $\{x_n\}_n$ নাও না কেন, যদি $x_n \to a$ হয়, তবে $f(x_n) \to f(a)$ হতে বাধ্য।

তাহলে--

> $f(x)$-টা অতি অবশ্যই $x = a$-তে continuous হবে।

এই দুটো দিককে একসঙ্গে বলে continuity-র **sequential criterion**.
নীচে প্রথম অংশটা গুছিয়ে লিখে প্রমাণ করছি--

Sequential criterion for continuity (part 1)

Let (X, d_1) and (Y, d_2) be metric spaces. Let $a \in X$. Let $f : X \to Y$ be continuous at a. If $\{x_n\}_n \subseteq X$ is such that $x_n \to a$, then $f(x_n) \to f(a)$.

Proof: প্রথমেই লিখে নিই, কী দেখাতে হবে--

> To show
>
> $\forall \epsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq M \quad f(x_n) \in N_Y(f(a), \epsilon).$

শুরুতেই $\forall \epsilon > 0$ আছে, অতএব--

> $\forall\epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

এবার আছে $\exists M$. তাই একটা জুৎসই $M \in \mathbb{N}$ পেতে হবে।

> Since f is continuous at a, hence
>
> $$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in N_X(a, \delta) \quad f(x) \in N_Y(f(a), \epsilon). \qquad (*)$$

অর্থাৎ, x যদি a-র খুব কাছে যায়, তবে $f(x)$-ও $f(a)$-র খুব কাছে থাকবে। এদিকে $x_n \to a$ বলা আছে। তাই একটা পর্যায়ের পর x_n অবশ্যই a-র খুব কাছে থাকতে বাধ্য--

Since $x_n \to a$, hence

$$\exists M \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq M \quad x_n \in N_X(a, \delta). \qquad (**)$$

$\exists M$ Choose this $M \in \mathbb{N}$.

$\forall n$ Take any $n \geq M$.

Then, by (**), we have $x_n \in N_X(a, \delta)$.

Hence, by (*), we have $f(x_n) \in N_Y(f(a), \epsilon)$, as required.

[Q.E.D]

এবার উল্টো দিকটা--

Sequential criterion for continuity (part 2)

Let (X, d_1) and (Y, d_2) be metric spaces. Let $a \in X$. Let $f : X \to Y$ be any function. If for every sequence $\{x_n\}_n \subseteq X$ such that $x_n \to a$, we have $f(x_n) \to f(a)$, then f must be continuous at a.

Proof: আমাদের কাজ হল $f(x)$-কে $x = a$-তে continuous দেখানো। সংজ্ঞাটা লিখে নিই--

To show

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in N_X(a, \delta) \quad f(x) \in N_Y(f(a), \epsilon).$$

আমরা contradiction-এর পথে এগোব। তাই প্রথমে এর negation-টা নিয়ে শুরু করব, মানে $\forall$-গুলোকে $\exists$, আর $\exists$-গুলোকে $\forall$ করে দেব, এবং সব শেষের জিনিসটাকে উল্টে দেব--

Let, if possible, this be not true. Then

$$\exists \epsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in N_X(a, \delta) \quad f(x) \notin N_Y(f(a), \epsilon).$$

আমাদের কাজ হল এখান থেকে শুরু করে একটা contradiction খুঁজে পাওয়া, অর্থাৎ এমন কোনো $\{x_n\}_n$ খুঁজে পাওয়া যাতে $x_n \to a$ হয়, কিন্তু তাও $f(x_n) \to f(a)$ না হয়। কী করে এগোই দ্যাখো। আমরা প্রথমে $\exists \epsilon$-এর ϵ-টাকে হাতে রাখি--

We keep this ϵ fixed.

Taking $\delta = \frac{1}{n}$ for $n = 1, 2, 3, \ldots$ we have

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in N_X\left(a, \tfrac{1}{n}\right) \quad f(x_n) \notin N_Y(f(a), \epsilon).$$

এইভাবে δ-র জায়গায় $\frac{1}{n}$ নেওয়া একটা বহুলব্যবহৃত কৌশল। এখানে $\exists x$-এর জায়গায় $\exists x_n$ লিখেছি, কারণ যেহেতু ওর আগে $\forall n$ আছে, তাই $\exists x$-এর x-টা n-এর উপরে নির্ভর করতেই পারে। সেই নির্ভরতাটাকে একটু প্রকট করতেই x_n লিখেছি।

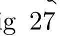
> Then $d_1(x_n, a) < \frac{1}{n} \to 0$. So $x_n \to a$.

এটা কী করে হল, বুঝলে? আমাদের ছিল $x_n \in N_X\left(a, \frac{1}{n}\right)$. সেখান থেকেই পেয়েছি $d_1(x_n, a) < \frac{1}{n}$. তারপর আমরা sandwich law ব্যবহার করেছি। আমরা জানি $d_1(x_n, a) \geq 0$. তাই এখানে $d_1(x_n, a)$-গুলো নীচে 0 আর উপরে $\frac{1}{n}$-এর মধ্যে পড়ে গেছে। যেহেতু $\frac{1}{n}$ ক্রমশঃ 0-তে যাচ্ছে, তাই বাধ্য হয়ে $d_1(x_n, a)$-কেও 0-তেই যেতে হচ্ছে।
পড়ে রইল খালি এটা দেখানো যে, $f(x_n) \not\to f(a)$. তবেই contradiction-এর ষোলো কলা পূর্ণ হবে। আমরা জানি $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(x_n) \notin N_Y(f(a), \epsilon)$, অর্থাৎ--

> But $\forall n \in \mathbb{N} \quad d_2(f(x_n), f(a)) \geq \epsilon$. So $f(x_n) \not\to f(a) (\Rightarrow\Leftarrow)$.

[Q.E.D]

Sequential criterion-এর একটা বড় প্রয়োগ হল কোনো function-কে continuous নয় দেখাতে।

Example 15: আমরা আগে $[0, 1]$ থেকে $\mathbb{R}$-এ যাবতীয় piecewise linear, continuous function-দের metric space নিয়ে একটা উদাহরণ আলোচনা করেছিলাম। Metric-টা ছিল sup-metric. এই metric space-টাকে যদি X নাম দিই, তবে আমরা একটা function নিয়েছিলাম $\ell : X \to \mathbb{R}$ যেটা ছিল "গ্রাফের দৈর্ঘ্য"। তখনি দেখিয়েছিলাম যে, $\ell(\cdot)$ মোটেই continuous নয়। সেই প্রমাণটা sequential criterion দিয়ে করলে একটু কম কষ্ট হত। কী করে বলো তো।
SOLUTION: এখানেও মূল যুক্তিটা একই থাকবে। আমরা এই sequence-টা নেব, $\{f_n(x)\}_n$, যেখানে f_1, f_2 আর f_3 দেখিয়েছি Fig 26, Fig 27 এবং Fig 28-এ। প্যাটার্ণটা ধরতে পারছ নিশ্চয়ই? প্রতি ধাপে f_n-এর
-এর মত চূড়াগুলোকে -এর মত দুটো চূড়ায় পরিণত করা হচ্ছে। দেখতেই পাচ্ছ যে, f_n-এর maximum হল $2^{-n} \to 0$. সুতরাং যদি $f(x) \equiv 0$ নিই, তবে $f_n \to f$ হচ্ছে। কিন্তু $\ell(f_n) = \sqrt{2} \not\to 1 = \ell(f)$. ■

এরকম আরেকটা অংক দিচ্ছি।

Exercise 18: Let $C_1[0, 1]$ be the metric space of all continuously differentiable functions from $[0, 1]$ to $\mathbb{R}$, and let $C[0, 1]$ be the metric space of all continuous functions from $[0, 1]$ to $\mathbb{R}$, both under sup-metric. Let $D : C_1[0, 1] \to C[0, 1]$ be the derivative function, *i.e.*, $D(f) = f'$. Show that $D(\cdot)$ is not continuous.
HINT:
এখানে "continuously differentiable function" বলতে সেই সব function-দের কথা বলা হয়েছে, যারা differentiable এবং যাদের derivative একটা continuous function.
এই অংকে আমরা একটা sequence নেব $\{f_n\} \subseteq C_1[0, 1]$ যাতে $f_n \to f \in C_1[0, 1]$ হয়, কিন্তু $D(f_n) \not\to D(f)$ হয়। ছবি দিয়ে ভাবলেই বুঝবে এরকম বিস্তর উদাহরণ সম্ভব। ব্যাপারটা আসলে এই, $f_n \to f$ মানে হল f_n-এর গ্রাফ আর f-এর গ্রাফ পরস্পরের খুব কাছে রয়েছে। কিন্তু তা সত্ত্বেও এমনটা অবশ্যই সম্ভব যে f হয়তো সটান সোজা আর f_n তার গা বেয়ে খুব এঁকেবেঁকে চলেছে। সোজা দড়ি বেয়ে লতানো গাছ যেমন ওঠে আর কি! Differentiate করলে আঁকাবাঁকা f_n-এর

Fig 26

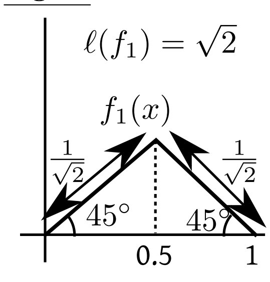


Fig 27

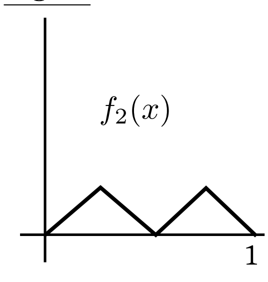
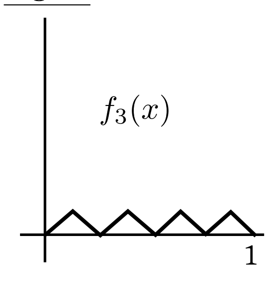


Fig 28



derivative আর সটান সোজা f-এর derivative সম্পূর্ণ আলাদা কিছু হবে। অবশ্য ছবি দিয়ে ভাবতে যেসব function সহজ, ফর্মুলা দিয়ে লিখতে গেলে অনেক সময়ে সেগুলো বেশ জটিল হয়ে ওঠে। এখানে তোমাকে আমি ছোট্টো একটা সূত্র দিচ্ছি এরকম একটা $\{f_n\}_n$ আর f বার করার জন্য, যাদের গ্রাফ আর ফর্মুলা দুটোই সহজ। তোমার নিশ্চয়ই $\sin x$-এর গ্রাফ মনে আছে (Fig 29)। যদি $\sin 2x$-এর গ্রাফ নিই, তবে সেটা দেখতে হবে Fig 30-এর মত, আর $\frac{1}{2}\sin 2x$-এর গ্রাফ হবে Fig 31-এর মত। ভালো করে Fig 29 আর Fig 31-এর তুলনা করে দ্যাখো, ঢেউগুলোর আকার একই আছে, খালি সাইজে ছোটো হয়ে গেছে এই যা। এ থেকে কী করে $\{f_n\}_n$ বানানো যায় চিন্তা করো। ■

এতক্ষণ আমরা sequential criterion দিয়ে বিভিন্ন function-কে continuous নয় দেখাচ্ছিলাম। এবার একটা function-কে sequential criterion ব্যবহার করে continuous দেখাতে বলেছে।

Example 16: If $\{x_n\}_n$ and $\{y_n\}_n$ are convergent sequences in a metric space (X, d) show that $\lim d(x_n, y_n)$ exists. Hence correct or justify: $d(x, y)$ is a continuous function.[3+1] **(2007.11b)**

SOLUTION: প্রথম অংশটা আগের অধ্যায়েই করেছি। সেখানে আমরা এটা দেখিয়েছিলাম যে যদি $x_n \to x$ আর $y_n \to y$ হয়, তবে $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$. এবার অংকটার দ্বিতীয় অংশর জন্য আমরা sequential criterion of continuity ব্যবহার করব। প্রথমেই একটা সমস্যা আছে। এখানে d হল $X \times X$ থেকে $\mathbb{R}$-এ একটা function. আমরা $\mathbb{R}$-এর উপরে Euclidean metric নিয়ে কাজ করব। কিন্তু $X \times X$-এর উপরে তো কোনো metric দিয়ে দেওয়া নেই!। বস্তুতঃ এটা অংকটারই ত্রুটি। যাই হোক, আমরা নিজেরাই $X \times X$-এর উপরে একটা metric দিয়ে নেব--

> Second part: We shall consider $X \times X$ with the metric
>
> $$\rho((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d(x_1, y_1) + d(x_2, y_2)$$
>
> for $x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$.

এটা যে সত্যিই একটা metric সেটা প্রমাণ করা খুবই সহজ। তবে সেই প্রমাণটা এই সমাধানের মধ্যে করতে গেলে সমাধানটা খুব লম্বা হয়ে যাবে বলে বাদ দিলাম।

> The statement is correct.
>
> Under this metric $x_n \to x$ and $y_n \to y$ if and only if $(x_n, y_n) \to (x, y)$.
>
> So if we take any $\{(x_n, y_n)\}_n \subseteq X \times X$ with $(x_n, y_n) \to (x, y)$, then $x_n \to x$ and $y_n \to y$.
>
> Hence by the first part we have $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$.
>
> So by the sequential criterion of continuity of functions from $X \times X \to \mathbb{R}$, the function $d(x, y)$ must be continuous.

Fig 29

$\sin x$

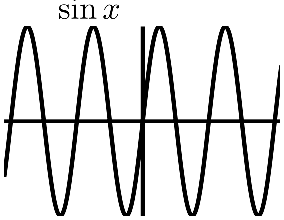


Fig 30

$\sin 2x$

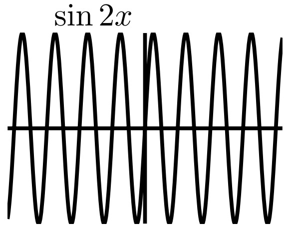
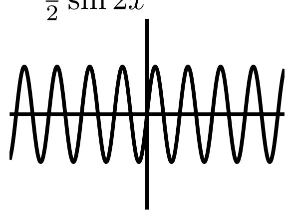


Fig 31

$\frac{1}{2}\sin 2x$



■

21.2 Uniform continuity-র জন্য

Continuity-র বেলায় যেমন sequential criterion আছে, তেমনি uniform continuity-র জন্যও আছে। ধরো (X, d_1) আর (Y, d_2) দুটো metric space এবং $f : X \to Y$ একটা function. এই f-এর uniformly continuous হবার sequential criterion-টা সহজ বাংলায় এইরকম--

> প্রথমে X-এর মধ্যে দুটো sequence নিতে হয় $\{u_n\}_n$ আর $\{v_n\}_n$, যারা পরস্পরের কাছাকাছি যাচ্ছে, মানে $d_1(u_n, v_n) \to 0$. যদি f-টা uniformly continuous হয়, তবে দেখা যাবে যে $d_2(f(u_n), f(v_n)) \to 0$ হচ্ছে।

বিপরীতপক্ষে--

> যদি যেকোনো এক জোড়া $\{u_n\}_n$ আর $\{v_n\}_n$-এর জন্যই দ্যাখো যে $d_1(u_n, v_n) \to 0$ হলেই $d_2(f(u_n), f(v_n)) \to 0$ হচ্ছে, তবে নিশ্চিত জানবে f-টা uniformly continuous হতে বাধ্য।

এই sequential criterion-এর প্রধান প্রয়োগ হল কোনো function-কে uniformly continuous নয় দেখানোর জন্য। একটা উদাহরণ দেখাই।

Example 17: ধরো $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ হল $f(x) = x^2$. এখানে Euclidean metric নিয়ে কাজ হচ্ছে। এই দুটো sequence নাও, $u_n = n$ আর $v_n = n + \frac{1}{n}$. পরীক্ষা করে দ্যাখো $|u_n - v_n| \to 0$ এবং $|f(u_n) - f(v_n)| \to 0$ হচ্ছে কিনা। এ থেকে f-এর uniform continuity নিয়ে কী বলতে পারো?

SOLUTION: এখানে $|u_n - v_n| = \frac{1}{n} \to 0$. কিন্তু $|f(u_n) - f(v_n)| = \left|n^2 - \left(n + \frac{1}{n}\right)^2\right| = 2 + \frac{1}{n^2} \to 2 \neq 0$. সুতরাং sequential criterion দিয়ে বলা যাচ্ছে যে, f-টা এখানে uniformly continuous হতে পারে না। ■

এবার uniform continuity-র sequential criterion-টা প্রমাণ করব, দুইভাগে ভেঙে--

> **Sequential criterion for uniform continuity (part 1)**
>
> Let (X, d_1) and (Y, d_2) be metric spaces. Let $f : X \to Y$ be any uniformly continuous function. Let $\{u_n\}_n, \{v_n\}_n \subseteq X$ be such that $d_1(u_n, v_n) \to 0$. Then we must have $d_2(f(u_n), f(v_n)) \to 0$.

Proof:

To show

◎ $\forall \epsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq M \quad d_2(f(u_n), f(v_n)) < \epsilon.$

$\forall\epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

Since f is uniformly continuous, hence

$$\exists \delta > 0 \quad \forall a \in X \quad \forall x \in N_X(a, \delta) \quad d_2(f(a), f(x)) < \epsilon. \qquad (*)$$

এটা পেয়েছি সরাসরি uniform continuity-র সংজ্ঞা থেকে। এখানে বক্তব্যটা হল-- যদি এরকম যেকোনো $a, x \in X$ নাও, যাতে $d_1(a, x) < \delta$ হয়, তবে $d_1(f(a), f(x)) < \epsilon$ হবেই। এদিকে $d_1(u_n, v_n) \to 0$, সুতরাং একটা পর্যায়ের পর থেকে $d_1(u_n, v_n) < \delta$ হবে, অতএব $d_2(f(u_n), f(v_n)) < \epsilon$ হতে বাধ্য। এই কথাটাই আমরা এবার গুছিয়ে লিখব।

Again, since $d_1(u_n, v_n) \to 0$, hence $\exists M \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq M \quad d_1(u_n, v_n) < \delta$.

$\boxed{\exists M}$ Choose this $M \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\forall n}$ Take any $n \geq M$.

We have $d_1(u_n, v_n) < \delta$, ie, $v_n \in N_X(u_n, \delta)$.
Hence by (*), we have $d_2(f(u_n), f(v_n)) < \epsilon$, as required.

এখানে আমরা (*)-এ a-র জায়গায় u_n এবং x-এর জায়গায় v_n নিয়েছি। **[Q.E.D]**

এবার sequential criterion-টার উল্টো দিকটা দেখাব, মানে যখনই এক জোড়া sequence নেবে $\{u_n\}_n$, $\{v_n\}_n$, যাতে $d_1(u_n, v_n) \to 0$ হয়, তখনই যদি দ্যাখো যে $d_2(f(u_n), f(v_n)) \to 0$ হচ্ছে, তবে f-টা uniformly continuous হবে। সেটাই নীচের theorem-টার বক্তব্য।

Sequential criterion for uniform continuity (part 2)

Let (X, d_1) and (Y, d_2) be metric spaces. Let $f : X \to Y$ be any function. If for every pair of sequences $\{u_n\}_n, \{v_n\}_n \subseteq X$ such that $d_1(u_n, v_n) \to 0$, we have $d_2(f(u_n), f(v_n)) \to 0$, then f must be uniformly continuous.

Proof:

To show

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall a \in X \quad \forall x \in N_X(a, \delta) \quad f(x) \in N_Y(f(a), \epsilon).$$

আমরা এটা contradiction দিয়ে প্রমাণ করব। শুরু করতে হবে এই বাক্যটার negation নিয়ে--

Let, if possible, this be false. Then

$$\exists \epsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists a \in X \quad \exists x \in N_X(a, \delta) \quad f(x) \notin N_Y(f(a), \epsilon).$$

একটা contradiction-এ পৌঁছবার জন্য আমরা এমন একজোড়া sequence খুঁজে বার করব, যারা পরস্পরের কাছাকাছি যাচ্ছে, কিন্তু f লাগানোর পর আর কাছাকাছি যাবে না। তার জন্য প্রথমেই ওই $\exists \epsilon$ বলে যে ϵ-টা পেয়েছি, সেটাকে হাতে রাখতে হবে।

Keep this ϵ fixed.

এবার সেই বহুলব্যবহৃত কৌশল, δ-র জায়গায় $\frac{1}{n}$ বসানো--

Putting $\delta = \frac{1}{n}$ for $n = 1, 2, 3, \ldots$ we have

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists a_n \in X \quad \exists x_n \in N_X\left(a_n, \tfrac{1}{n}\right) \quad f(x_n) \notin N_Y(f(a_n), \epsilon).$$

ব্যস্‌, আমাদের sequence দুটো পেয়ে গেছি, $\{a_n\}_n$ আর $\{x_n\}_n$.

> Since $x_n \in N_X\left(a_n, \frac{1}{n}\right)$, hence $d_1(a_n, x_n) < \frac{1}{n} \to 0$.
> But since $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(x_n) \notin N_Y(f(a_n), \epsilon)$, hence $d_2(f(a_n), f(x_n)) \geq \epsilon > 0$.
> So $d_2(f(a_n), f(x_n)) \not\to 0 (\Rightarrow\Leftarrow)$.

[Q.E.D]

নীচের কয়েকটা অংক sequential criterion দিয়ে করার চেষ্টা করো।

Exercise 19: ধরো $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, যেখানে $f(x) = x^3$. দেখাও যে f-টা মোটেই uniformly continuous নয়। ■

Exercise 20: $F : C[0,1] \to \mathbb{R}$ দিচ্ছি এরকম--

$$F(f) = f(0) + f(1)^2.$$

দেখাও যে এটা uniformly continuous নয়। ■

21.3 Cauchy sequence-এর সঙ্গে সম্পর্ক

Sequential criterion-গুলোতে আমরা বিভিন্ন sequence-এর convergence নিয়ে কাজ করছি। আর convergence-এর সঙ্গে ওতপ্রোতভাবে জড়িত আছে Cauchy sequence-এর ধারণাটা। যদি metric space-টা complete হয়, তবে Cauchy sequence আর convergent sequence একই ব্যাপার। সুতরাং যদি $f : X \to Y$ হয় continuous আর X, Y দুজনেই complete হয়, তবে X-এর মধ্যে যাই Cauchy sequence নাও না কেন $\{x_n\}_n$, অতি অবশ্যই $\{f(x_n)\}_n$-ও Y-এর মধ্যে Cauchy sequence হতে বাধ্য। এখানে চট্ করে একটা প্রশ্ন করে তোমাকে একটু ঠকাবার চেষ্টা করি।

Exercise 21: যদি $f : X \to Y$ নিই continuous আর খালি X হয় complete, তবেও কি একই সিদ্ধান্ত খাটবে, মানে X-র মধ্যে যে কোনো Cauchy sequence $\{x_n\}_n$ নিলেই কি $\{f(x_n)\}_n$-ও Y-এর মধ্যে Cauchy sequence হবেই?
HINT: মনে রেখো যে কোনো convergent sequence-ই কিন্তু Cauchy sequence-ও হয়। তার জন্য metric space-টার complete হবার কোনো দরকার নেই। ■

এবার ধরো X, Y কোনোটাই complete বলে দেওয়া নেই। খালি বলা আছে $f : X \to Y$ হল continuous এবং $\{x_n\}_n \subseteq X$ হল একটা Cauchy sequence. তবে কি $\{f(x_n)\}_n$-টা Y-এর মধ্যে একটা Cauchy sequence হবেই? এবার উত্তর হল--নাও হতে পারে। কিন্তু যদি f-টা uniformly continuous হত, তবে কিন্তু $\{f(x_n)\}_n$-টা Y-এর মধ্যে Cauchy sequence হতে বাধ্য! এ দুটো জিনিসই আমরা এবার দেখাব।
প্রথমে continuous-এর বেলায় একটা counterexample দেব। সেটাই রয়েছে নীচের অংকটায়।

Exercise 22: X নিলাম $(0, 1)$ আর Y নিলাম $\mathbb{R}$. দুক্ষেত্রেই Euclidean metric. এখানে function-টা নিচ্ছি $f(x) = \frac{1}{x}$. এবার যদি $x_n = \frac{1}{n}$ নিই, তবে দেখাও যে $\{x_n\}_n$ হল একটা Cauchy sequence, কিন্তু $\{f(x_n)\}_n$ মোটেই তা নয়। ■

এবার দেখাব--কোনো Cauchy sequence-এর উপর কোনো uniformly continuous function লাগালে ফের একটা Cauchy sequence-ই পাওয়া যায়।

> **THEOREM**
>
> Let (X, d_1) and (Y, d_2) be any two metric spaces. Let $f : X \to Y$ be uniformly continuous. Let $\{x_n\}_n \subseteq X$ be any Cauchy sequence. Then $\{f(x_n)\}_n \subseteq Y$ must be a Cauchy sequence.

Proof:

Shall show

$\forall \epsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq M \quad d_2(f(x_m), f(x_n)) < \epsilon.$

$\boxed{\forall \epsilon}$ Take any $\epsilon > 0$.

এবার উপযুক্ত M বার করতে হবে।

$\because f$ is uniformly continuous,

$$\therefore \exists \delta > 0 \quad \forall a \in X \quad \forall x \in N_X(a, \delta) \quad f(x) \in N_Y(f(a), \epsilon). \qquad (*)$$

Also, $\because \{x_n\}_n$ is Cauchy in X,

$$\therefore \exists M \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq M \quad d_1(x_m, x_n) < \delta. \qquad (**)$$

$\boxed{\exists M}$ Choose this $M \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\forall m, n}$ Take any $m, n \geq M$.

Then, by (**), $d_1(x_m, x_n) < \delta$.

Hence, by (*), we have $d_2(f(x_m), f(x_n)) < \epsilon$, as required.

[Q.E.D]

Answers

2. হ্যাঁ। **6.** (i) Continuous নয়। (ii) Continuous. **7.** X-এর সব subset-ই তো open. তাই যেকোনো $A \subseteq Y$-এর জন্যই $f^{-1}(A)$-টা open হবে। **8.** না। ধরো $f(x) \equiv c$. যদি $B \subseteq Y$ কোনো open set হয়, তবে $c \in B$ হলে $f^{-1}(B) = X$ আর $c \notin B$ হলে $f^{-1}(B) = \phi$. **9.** (1) ঠিক, বাকি দুটো ভুল। **11.** হ্যাঁ। Determinant-কে function নিলে $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$-এর preimage. **12.** $[0, \infty)$-র preimage. **13.** $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ নাও $f(x, y) = x^2 + y^2$. তাহলে unit circle-টা হল $\{1\}$-এর preimage. **14.** হ্যাঁ পারে। যেমন $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ নাও (Euclidean metric), যেখানে $f(x) \equiv 1$. তবে $f^{-1}(\{1\}) = \mathbb{R}$, যেটা open-ও বটে closed-ও বটে। কিন্তু $\{1\}$ মোটেই open ছিল না। **15.** যদি $X = (0, 1) \cup \{2\}$ নিই, তবে দেখাতে হবে $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in N_X(2, \delta) \quad f(x) \in N_{\mathbb{R}}(2, \epsilon)$. যেকোনো $\epsilon > 0$-এর জন্যই $\delta = \frac{1}{2}$ নিলেই চলবে, কারণ $N_X\left(2, \frac{1}{2}\right) = \{2\}$. দ্বিতীয় অংশে $\lim_{x \to 2} f(x)$ হল undefined, যেহেতু 2 মোটেই $(0, 1) \cup \{2\}$-এর limit point নয়। **16.** Lipschitz, তাই uniformly continuous. **17.** না, আগের অংকটার মত c_1, c_2 নিলেই হবে। **18.** $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin nx$ আর $f(x) \equiv 0$. **19.** $\{n\}_n$ আর $\left\{n + \frac{1}{n}\right\}_n$ নাও। **20.** $f_n(x) \equiv n$ আর $g_n(x) \equiv n + \frac{1}{n}$ নিয়ে দ্যাখো। **21.** হ্যাঁ। **22.** আমরা জানি যে, $\mathbb{R}$-এর মধ্যে $\frac{1}{n} \to 0$, তাই $\{x_n\}_n$ একটা Cauchy sequence. কিন্তু $f(x_n) = n \to \infty$.

Chapter V
Connectedness

DAY 22
Connected set (part 1)

22.1 কী জিনিস?

Fig 1-এ $\mathbb{R}$-এর কয়েকটা subset দেখিয়েছি। এদের সঙ্গে Fig 2-এর subset-গুলোর প্রধান পার্থক্য কী চোখে পড়ছে? কিংবা Fig 3-এর কথাই ধরো। এখানে আমরা $\mathbb{R}^2$-এর কয়েকটা subset এঁকেছি। এদের সঙ্গে Fig 4-এর subset-গুলোর প্রধান পার্থক্য কি? উত্তর হল--Fig 1 আর Fig 3-এর বেলায় subset-গুলো একটা করে খণ্ড দিয়ে তৈরী, কিন্তু Fig 2 আর Fig 4-এর বেলায় প্রতিটা subset একাধিক খণ্ড জুড়ে তৈরী। এই যে কথাটা বললাম--"খালি একটা খণ্ড দিয়ে তৈরী"--এই ব্যাপারটাকে বলে **connectedness**. অর্থাৎ Fig 1 আর Fig 3-এর set-গুলো সবাই **connected**, কিন্তু বাকিরা কেউ connected নয়।

Exercise 1: দুটো set দিচ্ছি $\mathbb{R}^2$-এর মধ্যে। এদের ছবি এঁকে তোমাকে বলতে হবে এরা প্রত্যেকে একেকটা connected set কিনা।

$$\begin{aligned} A &= \left\{(x,y) \ : \ \tfrac{1}{2} \leq |y| \leq \sin x\right\} \\ B &= \{(x,y) \ : \ 1 \leq x \leq 2 \text{ or } 3 \leq x \leq 4\} \\ C &= \{(x,y) \ : \ 1 \leq x \leq 2 \text{ or } 3 \leq y \leq 4\}. \end{aligned}$$

■

ছবি দেখে যখন একটা ধারণা বোঝা যায়, তার পরেই আমাদের কাজ হয় ধারণাটাকে অংকের ভাষায় প্রকাশ করা। কাজটা সাধারণতঃ ধাপে ধাপে হয়, কতকটা প্রতিমা গড়ার মত। প্রথমে একটা কিছু গড়া হয়, তারপর হয়তো তার নাকটা পছন্দ হল না,

Fig 1

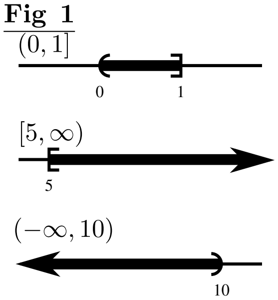


Fig 2

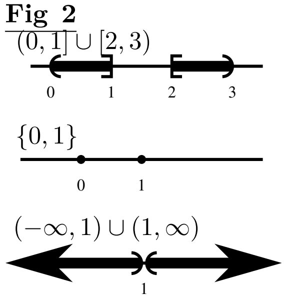


Fig 3

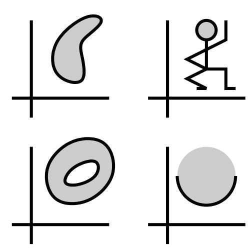
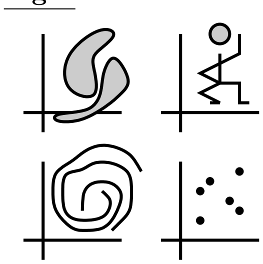


Fig 4



পরের বার নাকটাকে একটু টিকোলো করে দিলাম, তারপরের ধাপে হয়তো চোখটা একটু ঠিক করলাম। গণিতজ্ঞরা এইভাবেই তিলে তিলে নানারকম সংজ্ঞা, theorem ইত্যাদি গড়ে তোলেন। নীচের অংকগুলোতে তার একটু স্বাদ পাওয়া যাবে। Connected set-এর সংজ্ঞা বানানোর জন্য আমাদের প্রথম প্রচেষ্টাটা এইরকম হতে পারে--

> একটা set-কে connected বলব যদি তাকে দুটো disjoint টুকরোতে ভেঙে প্রকাশ না করা যায়।

এই প্রথম প্রচেষ্টা কত দূর সফল হয়েছে, সেটা নিয়েই নীচের অংকটা।

Example 1: "A is connected" কথাটার মানে কি এই যে A-কে কখনও $A = A_1 \cup A_2$ হিসেবে লেখা যাবে না, যেখানে $A_1 \cap A_2 = \phi$?
SOLUTION: না, $[0,2]$ নিশ্চয়ই connected, কিন্তু ওকে তো আমরা $[0,2] = [0,1) \cup [1,2]$ হিসেবে লিখতেই পারি! এখানে আমরা $[0,1)$ আর $[1,2]$-কে দুটো আলাদা টুকরো বলছি না, কারণ ওরা disjoint হলেও গায় গায় লেগে আছে। আলাদা টুকরো বলে গণ্য হবার জন্য ওদের মাঝখানে সামান্য হলেও ফাঁক থাকা দরকার। ■

দ্বিতীয় প্রচেষ্টা--

> তবে কি বাড়তি শর্ত চাপাব যে টুকরোগুলোর মধ্যে দূরত্ব > 0 হতে হবে?

এটাই নীচের অংকটায় জানতে চেয়েছে। এর জন্য দুটো set-এর মধ্যে দূরত্ব কী করে মাপে, সেটা একবার মনে করে নেওয়া যাক। ধরো (X,d) কোনো metric space আর A, B ওর দুটো subset. তবে ওদের মধ্যে দূরত্ব হবে

$$d(A,B) = \inf\{d(a,b) \ : \ a \in A, \ b \in B\}.$$

Example 2: ধরো (X,d) একটা metric space আর $A \subseteq X$. তবে "A is connected" মানে কি এই যে আমরা কখনো $A = A_1 \cup A_2$ লিখতে পারব না, যেখানে $d(A_1, A_2) > 0$ হবে? Fig 2-এর set-গুলোর বেলায় এই শর্তটা পরীক্ষা করে দ্যাখো। সব ক্ষেত্রেই শর্তটা খাটছে তো?
SOLUTION: নাঃ, $(-\infty,1) \cup (1,\infty)$-এর মধ্যে দুটো টুকরো আছে, $(-\infty,1)$ আর $(1,\infty)$ যাদের মধ্যে দূরত্ব মোটেই > 0 নয়। কিন্তু ছবি দেখেই বুঝতে পারছি এই set-টা connected নয়। ■

এই উদাহরণ থেকে দেখা গেল যে, দুটো টুকরোর মধ্যে খালি একটা বিন্দু ফাঁক থাকাই যথেষ্ট, দূরত্ব > 0 না হলেও চলে। এই ব্যাপারটা মাথায় রেখে আমাদের তৃতীয় প্রচেষ্টা--

> টুকরোগুলো যেন কেউ কাউকে ছুঁয়ে না থাকে, মানে একটা টুকরোর point-রা অন্য টুকরোটার কোনো point-এর গায় গিয়ে ভীড় না জমায়। মানে একটা টুকরোর কোনো limit point যেন অন্য টুকরোতে না গিয়ে পড়ে।

এতেও একটা গলদ বার করা যায়--$[0,1] = [0,1] \cup \phi$ লেখা যায়, এবং এরা আমাদের তৃতীয় প্রচেষ্টার সব শর্তই পালন করে, কিন্তু তাও নিশ্চয়ই $[0,1]$ আর ϕ-কে দুটো আলাদা টুকরো বলবে না! এটা নেহাত ফাঁকি হল। ϕ-এর মধ্যে তো কিছুই নেই, ওকে আবার টুকরো বলব কেন? সুতরাং সব দিক বাঁচিয়ে লেখা যায় এইভাবে--

> আমরা বলব "A is connected" যদি A-কে কোনোভাবেই $A = A_1 \cup A_2$ হিসেবে লেখা না যায়, যেখানে
>
> - $A_1, A_2 \neq \phi$
> - $A_1 \cap A_2 = \phi$
> - A_1-এর কোনো limit point নেই A_2-র মধ্যে, এবং
> - A_2-রও কোনো limit point পাবে না A_1-এর মধ্যে।

খুব লম্বা শোনাচ্ছে? এটাকে বেশ সংক্ষেপে লেখা যায়। সেটাই আমরা ধাপে ধাপে করব--

- বলেছে যে $A_1 \cup A_2 = A$ আর $A_1 \cap A_2 = \phi$, তার মানে তুমি যদি A-কেই একটা metric space বলে ভাবো, তবে তার মধ্যে A_1 আর A_2 পরস্পরের complement, অর্থাৎ $A_1 = A_2^c$ এবং $A_2 = A_1^c$.
- যখন আমরা বলছি A_1-এর কোনো limit point নেই A_2-র মধ্যে, তার মানে A-র মধ্যে A_1-এর যদি কোনো limit point থেকে থাকে তো তারা সবাই A_1-এর ভিতরেই আছে। সুতরাং A_1 অবশ্যই closed in A.
- ঠিক একই যুক্তিতে A_2-ও closed in A.
- যেহেতু A-র মধ্যে A_1 আর A_2 পরস্পরের complement, আবার দুজনেই A-র মধ্যে closed-ও বটে, তাই দুজনেই আবার A-র মধ্যে open হতেও বাধ্য, কারণ closed-এর complement-রাই তো open হয়!

যে সব set একই সঙ্গে closed এবং open হয়, তাদেরকে অনেক সময়ে কাব্য করে লোকে **clopen** বলে। সুতরাং দাঁড়ালো--

> A-কে আমরা connected বলব না যদি A-কে $A_1 \cup A_2$ আকারে লেখা যায়, যেখানে A_1 আর A_2 দুজনেই nonempty এবং A-র মধ্যে clopen[1]

সুতরাং এবার আর connected set-এর সংজ্ঞা লিখতে অসুবিধা নেই--

DEFINITION: Connected

A subset A of a metric space is called connected if it is not possible to split A as $A = A_1 \cup A_2$, where A_1, A_2 are both nonempty and clopen in A and $A_1 \cap A_2 = \phi$.

আমরা এখানে বললাম একটা metric space-এর কোনো subset-কে কখন connected বলে। অনেক সময়ে দেখবে লোকে আস্ত metric space-টাকেই connected বলছে। সেখানে আসলে metric space-টাকে নিজেই নিজের subset বলে ধরে এই সংজ্ঞাটা লাগানো হয়েছে, মানে (X, d)-কে একটা connected metric space বলব যদি X এই metric space-এ একটা connected set হয়।
যদি কোনোভাবে A-কে এইরকম দুটো disjoint, nonempty clopen set-এ ভেঙে লেখা যায়, তবে আর A-র পক্ষে connected হওয়া সম্ভব নয়। এরকম ভেঙে লেখাকে বলে A-র একটা **disconnection**.

DEFINITION: Disconnection

Let A be any subset of a metric space. By a **disconnection** of A we mean writing A as $A = A_1 \cup A_2$, where $A_1, A_2 \neq \phi$ are disjoint and clopen in A.

আমরা connected-এর সংজ্ঞাটাকে আরো নানাভাবে প্রকাশ করতে পারি, সবগুলোই সমার্থক। আমরা A-কে connected বলব যদি--

- A-র কোনো disconnection না থাকে।

[1] যেকোনো একজন clopen হলেই অন্যজনও clopen হতে বাধ্য।

- A-কে $A_1 \cup A_2$ আকারে লেখা না যায়, যেখানে $A_1 \cap A_2 = \phi$, এবং $A_1, A_2 \neq \phi$ এবং A_1, A_2 দুজনেই A-র মধ্যে open. লক্ষ করো, এখানে clopen না বলে খালি open বলেছি, কারণ দুজনেই যদি open হয় তো দুজনেই closed হতেও বাধ্য।
- আগের শর্তটায় যদি open-এর জায়গায় closed লেখো, তাহলেও চলবে।
- A-র মধ্যে কোনো nonempty, proper clopen subset না থাকে। কারণ, যদি থাকে তবে সেটাকে A_1 আর তার complement-টাকে A_2 নিলেই একটা disconnection পেয়ে যাবে। এখানে proper শর্তটা লেগেছে মানে $A_1 \neq A$, যাতে $A_2 = \phi$ হয়ে না যায়।

এই শেষের শর্তটাই দেখতে সবচেয়ে ছোটো। আসলে আমরা যাদের সহজ ভাষায় "টুকরো" বলি, তারা এবং তাদের union-রাই হল nonempty clopen subset-গুলো।
অনেক বইতে দেখবে disconnection-এর সংজ্ঞা এইভাবে দিয়েছে--

$A = A_1 \cup A_2$-কে একটা disconnection বলব, যদি $A_1, A_2 \neq \phi$ এবং $\overline{A_1} \cap A_2 = A_1 \cap \overline{A_2} = \phi$ হয়।

এখানে $\overline{A_1} \cap A_2 = A_1 \cap \overline{A_2} = \phi$ শর্তটার মধ্যে তিনটে জিনিস ঢুকে আছে--এক, $A_1 \cap A_2 = \phi$, দুই, $A_1' \cap A_2 = \phi$ এবং তিন, $A_1 \cap A_2' = \phi$. অর্থাৎ A_1, A_2 হল disjoint, এবং ওদের কারো limit point অন্যটার মধ্যে নেই।
তবে অনেক ছাত্রকেই দেখেছি, এই সংজ্ঞাটা নিয়ে চিন্তা করতে পারে না। তার চেয়ে বরং clopen set ব্যবহার করে চিন্তা করাই ভালো, কারণ clopen set-দের ছবি দিয়ে ভাবা যায়। সহজ ভাষায় যার "টুকরো", তারা (এবং তাদের union-রাই) হল clopen.

Example 3: বলো তো $A = (0,1) \cup (2,3)$-এর মধ্যে nonempty, proper clopen set কী কী আছে।

SOLUTION: $(0,1)$ আর $(2,3)$. সাবধান, $(0,1)$ কিন্তু <u>A-র মধ্যে</u> closed. একইভাবে $(2,3)$-ও তাই। ■

Exercise 2: চট্ করে বল তো $[0,1) \cup \{2,3\} \cup (10,11)$-এর মধ্যে কতগুলো nonempty, clopen subset আছে? ■

একটা metric space-এর কোনো subset-কে connected বলা যায় কিনা, সেটা অবশ্যই metric-টার উপর নির্ভর করে। যেমন ধরো আমরা দেখেছি যে $[0,1]$ হল Euclidean metric-এ connected. এবার নীচের অংকটা কর দেখি।

Exercise 3: যদি d হয় discrete metric, তবে কি $([0,1], d)$ একটা connected metric space হবে? ■

Exercise 4: আমরা জানি যে Euclidean metric ব্যবহার করলে $\{0,1\}$ মোটেই connected নয়। এমন কোনো metric দিতে পারো যাতে $\{0,1\}$ একটা connected set হয়? ■

Exercise 5: Let (X, d) be a metric space where $X = A \cup B$ with $A, B \neq \phi$ and $d(A, B) > 0$. Show that X is not connected. ■

এ যাবৎ আমরা metric space-দের যতরকম বৈশিষ্ট্য আলোচনা করেছি, সবই প্রায় real analysis-এর ধারণাগুলোরই generalisation. এর অন্যতম ব্যতিক্রম হল connected-এর ধারণাটা। Real analysis শেখার সময়ে কিন্তু আমরা connected শব্দটা কোথাও ব্যবহার করি নি। আসলে $\mathbb{R}$-এর connected subset-দের একটা বিশেষ রূপ আছে, তাদের সেখানে আমরা অন্য নামে চিনতাম। এবার সেইটা নিয়ে আলোচনা করার সময় এসেছে।

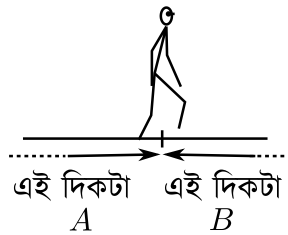


Fig 5

22.2 Connected subsets of $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$-কে একটা লম্বা লাইন বলে কল্পনা কর। এটা যে "একটানা" তাতে নিশ্চয়ই সন্দেহ নেই! অর্থাৎ Euclidean metric-এ এটা একটা connected set. সেটা ছবি দিয়ে অনুভব করা যাচ্ছে। কিন্তু প্রমাণ করবে কীভাবে? সেটাই চেয়েছে নীচের অংকটায়।

Example 4: Prove that $\mathbb{R}$ is connected under the usual metric.

SOLUTION: আমরা proof by contradiction লাগাব, অর্থাৎ প্রথমে ধরে নেব যে connected নয়--

> Let, if possible, $\mathbb{R}$ be not connected under the usual metric.

তার মানে একটা disconnection পাওয়া যাবে--

> Then we must have some disconnection $\mathbb{R} = A \cup B$.

Disconnection মানে কী মনে আছে তো? এর মানে হল, $A, B \neq \phi$, $A \cap B = \phi$ এবং A, B দুজনেই $\mathbb{R}$-এর মধ্যে open (এবং closed)। এবার কী করতে চলেছি, সেটা বুঝে নাও। আমরা A থেকে শুরু করে $\mathbb{R}$ বরাবর হাঁটতে হাঁটতে B-র মধ্যে ঢুকে যাব। এটা করা যাবে কারণ $\mathbb{R}$ যেহেতু "একটানা"। কিন্তু ঠিক যেইখানটায় আমরা A-র থেকে বেরিয়ে B-তে ঢুকব (Fig 5), সেইখানে নিশ্চয়ই B-কে A-র গায় লেগে থাকতে হবে। অতএব $A \cup B$ মোটেই একটা disconnection হতে পারবে না। সেটাই হবে আমাদের contradiction.
প্রথমে তাহলে কোথা থেকে হাঁটা শুরু করব আর কোথায় শেষ করব, সেটা ঠিক করে নেওয়া যাক। তার জন্য একটা যা খুশী $a \in A$ আর $b \in B$ নাও। এটা করা যাবে কারণ $A, B \neq \phi$.

> We take any $a \in A$ and any $b \in B$. (Possible since $A, B \neq \phi$).

বুঝতেই পারছ যে $a \neq b$, কারণ A আর B হল disjoint. সুতরাং হয় $a < b$ নয়তো $a > b$. দু ক্ষেত্রেই প্রমাণটা একইভাবে হবে, সুতরাং without loss of generality ধরে নেব $a < b$.

> $\because A \cap B \neq \phi$, $\therefore a \neq b$. We assume, w.l.g, that $a < b$.

এবার a থেকে শুরু করে গুটিগুটি চরণে b-র দিকে এগোতে থাকো। দ্যাখো কতক্ষণ তুমি A-র ভিতরে থাকো। মানে এই set-টা নাও--

> $$C = \{c \geq a \ : \ [a, c] \subseteq A\}.$$

আমরা দেখব কোথায় আমাদের চলা শেষ হয়, অর্থাৎ C-এর supremum-টা কী হয়। অবশ্য supremum নিয়ে আলোচনা করার আগে আমাদের দেখিয়ে নিতে হবে যে, $C \neq \phi$ এবং C-টা bounded from above.

Note that $C \neq \phi$ (Since $a \in C$, as $[a, a] = \{a\} \subseteq A$.)
Also C is bounded from above by b.

⟦ Because:

If we take any $c \in C$, then $[a, c] \subseteq A$.
$\therefore b \notin [a, c]$ Since $b \notin A$.
তার মানে হয় $b < a$ আর নয়তো $b > c$. কিন্তু বলাই আছে $b \geq a$. তাই $b > c$.
Since $b \geq a$, hence $b > c$.
So C is bounded above by b.

⟧

সুতরাং C-এর supremum সত্যিই আছে--

So $\sup(C) \in \mathbb{R}$. Let $\ell = \sup(C)$.

এবার চিন্তা কর তো ℓ-টা A-র মধ্যে আছে, নাকি বাইরে? আমরা দেখাব যে, দু ক্ষেত্রেই contradiction আসবে।

Case 1: $\ell \in A$: Since A is open, hence $\exists \epsilon > 0 \quad N(\ell, \epsilon) \subseteq A$.
So $\left[a, \ell + \frac{\epsilon}{2}\right] \subseteq A$, and hence $\ell + \frac{\epsilon}{2} \in C (\Rightarrow\Leftarrow \because \ell + \frac{\epsilon}{2} > \sup(C))$.

যদি $\ell \in B$ হয়, তবেও সমস্যা--

Case 2: $\ell \in B$: Since B is open, hence $\exists \epsilon > 0 \quad N(\ell, \epsilon) \subseteq B$.
So $\ell - \frac{\epsilon}{2}$ is also an upper bound of $C (\Rightarrow\Leftarrow \because \ell - \frac{\epsilon}{2} < \sup(C))$.

■

অতএব দেখা গেল যে Euclidean metric নিলে $\mathbb{R}$ একটা connected set. এটার ভিত্তিতে একটা অংক দিই।

Exercise 6: Let $f : \mathbb{R} \to Y$ be a continuous function, where Y is a discrete metric space, and $\mathbb{R}$ is equipped with the Euclidean metric. Then show that f must be a constant function. ■

এবার বলো তো $\mathbb{R}$-এর মধ্যে আর কী কী connected subset আছে? আসলে $\mathbb{R}$-এর বেলায় connected subset-দের একটা খুব সহজ এবং অতি পরিচিত বর্ণনা আছে, সেটা কয়েকটা উদাহরণ নিয়ে চিন্তা করলেই মাথায় এসে যাওয়া উচিত। বস্তুতঃ এই সহজ বর্ণনাটা আছে বলেই আমরা real analysis শেখার সময়ে connected শব্দটা উচ্চারণই করি না, সেই সহজ বর্ণনাটা দিয়েই কাজ সেরে ফেলি। ভালো করে ভেবে দ্যাখো সেই বর্ণনাটা মনে করতে পারো কিনা। উত্তরটা রয়েছে নীচের theorem-এ।

THEOREM

A subset of $\mathbb{R}$ is connected under the Euclidean metric if and only if it is an interval.

এখানে interval বলতে (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$, এবং $[a,b]$ তো আছেই, সেই সঙ্গে $(-\infty,b)$, $(-\infty,b]$, (a,∞) আর $[a,\infty)$ চেহারার interval-গুলোও আছে। আর $[a,b]$ কেসটার মধ্যে কিন্তু $a=b$-র কেসটাও আছে, যেমন $[2,2]$ মানে আসলে $\{2\}$, যেটা অবশ্যই $\mathbb{R}$-এর একটা connected subset. এছাড়া $(-\infty,\infty)$ তো আছেই। যদি এতরকম চেহারার interval-এর জন্য প্রমাণটা আলাদা আলাদা করে করতে হয়, তবে অনেক কিছু লিখতে হবে। তার চেয়ে আমরা গোড়াতেই interval-এর একটা এমন সংজ্ঞা লিখে নেব, যেটা এক ধাক্কায় সবগুলো কেসকেই হিসেবে রাখবে।

Proof:

> By an interval we shall understand a nonempty set $I\subseteq\mathbb{R}$ such that
>
> $$\forall a\leq b\in I\quad \forall c\in[a,b]\quad c\in I.$$

অর্থাৎ, কিনা I-এর মধ্যে যদি দুটো বিন্দু নাও, তবে তাদের মাঝখানের সব বিন্দুও I-এর মধ্যেই থাকবে, অর্থাৎ I-এর মধ্যে কোনো ফুটো নেই।

> <u>If part: Shall show that every interval is connected in $\mathbb{R}$:</u>
>
> Let $I\subseteq\mathbb{R}$ be any interval.
>
> Let, if possible, I be not connected. Let $I=A\cup B$ be a disconnection.

এখানে আবার সেই আগের theorem-এর প্রমাণের কায়দাটাই করব, গুটিগুটি চরণে A থেকে B-এর দিকে হাঁটব।

> Pick $a\in A$ and $b\in B$. (Possible $\because A,B\neq\phi$.)
>
> W.l.g., $a<b$.

আমরা a থেকে শুরু করে A-র ভিতর দিয়ে b-এর দিকে এগোতে শুরু করব। দেখব কতদূর যেতে পারি।

> Let $C=\{c\in\mathbb{R}\ :\ [a,c]\in A\}$.
>
> Then $C\neq\phi$, since $a\in C$.
>
> Also, C is bounded above by b.
>
> ⟦ <u>Because:</u>
>
> ...
>
> ⟧

কেন bounded above by b সেটা তো আগের প্রমাণে দিয়েইছিলাম। আর নতুন করে লিখলাম না, তুমিই শূন্যস্থানটা পূরণ করে নিও।

> Hence $\sup(C)\in\mathbb{R}$. Let $\ell=\sup(C)$.
>
> We see that $a\leq\ell\leq b$.

কারণ $a\in C$ এবং ℓ হল C-এর একটা upper bound. আবার b হচ্ছে C-এর একটা upper bound, এবং ℓ হল C-এর <u>least</u> upper bound.

> Since I is an interval, and $a, b \in I$, hence $\ell \in I$. So either $\ell \in A$ or $\ell \in B$.
> Case 1: $\ell \in A$: Since A is open, hence $\exists \epsilon > 0 \quad N(\ell, \epsilon) \subseteq A$.
> So $\left[a, \ell + \frac{\epsilon}{2}\right] \subseteq A$.
> Hence $\ell + \frac{\epsilon}{2} \in C (\Rightarrow\Leftarrow \because \ell + \frac{\epsilon}{2} > \sup(C))$.
> Case 2: $\ell \in B$: Since B is open, hence $\exists \epsilon > 0 \quad N(\ell, \epsilon) \subseteq B$.
> Hence $\ell - \frac{\epsilon}{2}$ is an upper bound of $C (\Rightarrow\Leftarrow \because \ell - \frac{\epsilon}{2} < \sup(C))$.

এবার উল্টো দিকটা--

> Only if part: Shall show that every connected subset of $\mathbb{R}$ is an interval:
>
> Let $I \subseteq \mathbb{R}$ be connected. Shall show
>
> $$\forall a \leq b \in I \quad \forall c \in [a, b] \quad c \in I. \qquad (*)$$

এখানেও contradiction লাগাব।

> Let, if possible, this be false. Then
>
> $$\exists a \leq b \in I \quad \exists c \in [a, b] \quad c \notin I.$$

এটা পেয়েছি (*)-এর negation নিয়ে, মানে $\forall$-গুলোকে $\exists$ করে এবং সব শেষের $c \in I$-টাকে উল্টে দিয়ে।
এবার contradiction পাওয়ার জন্য আমরা I-এর একটা disconnection বার করব। তার জন্য I-কে c বিন্দুতে ভেঙে দুভাগ করব--এক ভাগে থাকবে I-এর সেই সব বিন্দু যারা c-এর বাঁদিকে, আর অন্যভাগে থাকবে তারা যারা c-র ডানদিকে।

> Define $A = I \cap (-\infty, c)$ and $B = I \cap (c, \infty)$.

এবার দেখাব যে, এই A, B মিলে I-এর একটা disconnection হয়। তার জন্য disconnection-এর শর্তগুলো পরপর পরীক্ষা করে গেলেই হবে। প্রথম শর্ত, $A, B \neq \phi$.

> $\because a \in A$ and $b \in B$,
> $\therefore A, B \neq \phi$.

দ্বিতীয় শর্ত, $A \cap B = \phi$. সেটা বলাই বাহুল্য--

> Clearly, $A \cap B = \phi$, since $A \subseteq (-\infty, c)$ and $B \subseteq (c, \infty)$.

তৃতীয় শর্ত, $A \cup B = I$.

> Since $c \notin I$, hence $I = A \cup B$.

চতুর্থ শর্ত, A, B দুজনকেই <u>I-এর মধ্যে</u> open হতে হবে।

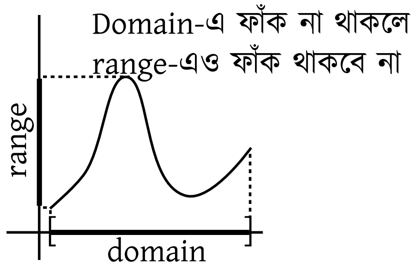


Fig 6

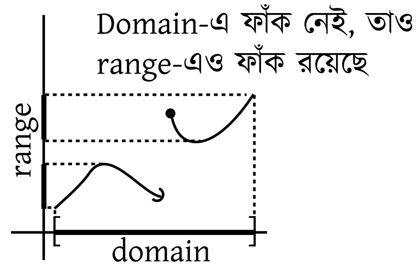


Fig 7

> We know that $(-\infty, c)$ is open in $\mathbb{R}$. So $A = I \cap (-\infty, c)$ is open in I.
> Similarly, (c, ∞) is open in $\mathbb{R}$. So $B = I \cap (c, \infty)$ is open in I.

ব্যস্, সব কটা শর্তই দেখানো হয়ে গেল--

> So $I = A \cup B$ is a disconnection($\Rightarrow\Leftarrow$).

[Q.E.D]

কালকে আমরা connected set-এর একটা প্রয়োগ দেখব।

DAY 23
Connected set (part 2)

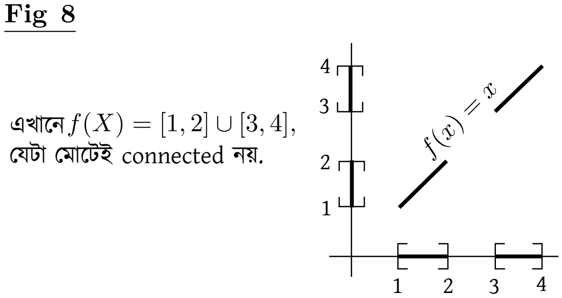
23.1 Intermediate value theorem

আমরা real analysis শেখার সময়ে intermediate value theorem শিখি, এইরকম--

> ধরো f হল $[a, b]$ থেকে $\mathbb{R}$-এ একটা continuous function. ধরো $f(a)$ আর $f(b)$-র মাঝখানে কোনো একটা সংখ্যা হল r. তবে intermediate value theorem বলে যে এমন একটা $c \in [a, b]$ পাওয়া যাবে, যাতে $f(c) = r$ হয়।

এই theorem-টা real analysis-এ খুবই কাজে লাগে। Metric space-এর বেলাতেও এই theorem-টার একটা সংস্করণ থাকলে ভালো হয়। সেই কাজটাই করা যায় connectedness ব্যবহার করে। এই যে বললাম $f(a)$ এবং $f(b)$ মাঝের

Fig 8



প্রতিটি value-ই f গ্রহণ করে, এর মানে হল f-এর range-টা, মানে $\{f(x)\ :\ x \in [a,b]\}$-এর মধ্যে কোনো ফাঁক নেই, অর্থাৎ ওই set-টা হল connected. অর্থাৎ continuous function-এর domain যদি connected হয়, তবে range-ও connected হতে বাধ্য (Fig 6)। এই গ্যারান্টীটা অবশ্য discontinuous function-দের বেলায় দেওয়া যায় না, যেমন দেখিয়েছি Fig 7-এ। আবার যদি domain-টা connected না হত, তবে function-টা continuous হলেও range-টা connected নাও হতে পারত। সেরকম একটা উদাহরণ দেখে নেওয়া যাক।

Example 5: ধরো $X = [1,2] \cup [3,4]$, আর $d(x,y) = |x-y|$. যদি $f(x) = x$ নিই তবে Fig 8 দেখেই বুঝতে পারছ যে এখানে "intermediate value theorem"-এর সিদ্ধান্তটা খাটছে না।

সমস্যাটা হল এখানে X-টা "একটানা" নয়, একাধিক টুকরো দিয়ে তৈরী, তাদের মাঝে ফাঁক ছিল। ওই ফাঁক দিয়েই আমাদের সাধের "intermediate value theorem"-টা ডুবে গেল!

তিন বুড়ো পণ্ডিত টাকচুড়ো নগরে
চড়ে এক গামলায় পাড়ি দেয় সাগরে
গামলায় ফুটো ছিল, আগে কেউ দেখো নি।
তাই মোর গানখানি থেমে গেল এখনি।

--সুকুমার রায় ■

সুতরাং intermediate value theorem-এর পিছনে continuity আর connectedness যৌথ প্রয়াস রয়েছে। ব্যাপারটা যেকোনো metric space-এই খাটে। সেটা নিয়েই নীচের theorem-টা।

THEOREM

Let X, Y be any two metric spaces. Let $f : X \to Y$ be any continuous function. If $A \subseteq X$ is any connected set, then $f(A)$ must be connected in Y.

Proof: Real analysis শেখার সময়ে intermediate value theorem-এর প্রমাণটা শিখতে অনেকেরই কান্না পায়। কিন্তু connectedness-এর কেরামতি দ্যাখো, সেই একই প্রমাণ এবার যেই connectedness ব্যবহার করে করব, অমনি কি ছোট্টো হয়ে যাবে--

> Let, if possible, $f(A)$ be not connected. Then there must be some disconnection $f(A) = B \cup C$.

আমরা এই disconnection-টা থেকে A-র একটা disconnection বার করে দেব। ব্যস্‌, অমনি contradiction, কারণ A বলা ছিল connected.

> Let $B_1 = f^{-1}(B)$ and $C_1 = f^{-1}(C)$.

আমরা দাবী করছি যে $B_1 \cup C_1$ হল A-র একটা disconnection. শর্তগুলো একে একে পরীক্ষা করে দেখা যাক। প্রথম শর্ত, nonempty--

> Since $\phi \neq B, C \subseteq f(A)$, hence $B_1, C_1 \neq \phi$.

এটা কী হল বুঝলে তো? $f^{-1}(B)$-টা ϕ হতে পারে একমাত্র একভাবেই, যদি B-টা $f(A)$-র সঙ্গে disjoint হয়। এখানে $\phi \neq B \subseteq f(A)$ হওয়ায় এই দুই পথই বন্ধ। একইভাবে $\phi \neq C \subseteq f(A)$ হওয়াই $C_1 \neq \phi$.
এবার দ্বিতীয় শর্ত, $B_1 \cap C_1 = \phi$ চাই--

> By property of preimage, $B_1 \cap C_1 = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(C) = f^{-1}(B \cap C) = f^{-1}(\phi) = \phi$.

তৃতীয় শর্ত, B_1 আর C_1 মিলে পুরো A হতে হবে--

> Since $f(A) = B \cup C$, hence $A = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(C)$, by property of preimage.
> So $A = B_1 \cup C_1$.

চতুর্থ শর্ত, A-এর মধ্যে B_1, C_1-কে open হতে হবে।

> Since $f : X \to Y$ is continuous, hence $f : A \to f(A)$ is also continuous.
> Since B, C are open in $f(A)$, hence their preimages B_1 and C_1 must also be open in A.

এইখানটায় একটু প্যাঁচ ছিল। আমরা সরাসরি $f : X \to Y$-এর continuity নিয়ে কাজ করতে পারি না, কারণ B আর C-কে তো Y-এর মধ্যে open বলা নেই, ওদের open বলা আছে $f(A)$-র মধ্যে। একইভাবে B_1, C_1-কে open দেখাতে হবে A-র মধ্যে, X-এর মধ্যে নয়।

> Thus $A = B_1 \cup C_1$ is a disconnection ($\Rightarrow\Leftarrow \because A$ is connected).

[Q.E.D]

কি সংক্ষিপ্ত প্রমাণ! Connectedness শেখার সুবিধাটা দেখলে?

23.2 Connected দেখানো

যদি তোমাকে কোনো একটা metric space-এর একটা subset দিয়ে সেটাকে connected কিনা পরীক্ষা করতে বলে, তবে কী করে এগোবে? যদি metric space-টা $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ বা $\mathbb{R}^3$ হয়, এবং Euclidean metric নিয়ে কাজ হয়, তবে অবশ্যই ছবি দিয়ে চিন্তা করতে পারো। কিন্তু তা না হলে কাজটা জটিল হতে পারে। যদি কোনোভাবে একটা disconnection আন্দাজ করে ফেলা যায়, তবে বেঁচে গেলে। কিন্তু সেটাও যদি না করা যায়, তবে এক্ষুণি যে theorem-টা শিখলাম, সেটা অনেক সময়ে কাজে আসে। এর জন্য theorem-টাকে এইভাবে সংক্ষেপে মনে রাখলে সুবিধা হবে--

> "Continuous image of a connected set is connected."

এটা দুমুখো তরোয়াল--

- যে set-টাকে connected কিনা পরীক্ষা করতে চাও, সেটাকে যদি কোনো পরিচিত connected set-এর continuous image দেখাতে পারো, তো অমনি প্রমাণ হয়ে গেল যে, তোমার set-টা connected.

- আবার যদি এমন একটা continuous function বার করতে পারো, যেটা লাগালে তোমার set-টা একটা disconnected set-এ পরিণত হয়, তবে প্রমাণ হয়ে গেল যে তোমার set-টা connected ছিল না।

কয়েকটা উদাহরণ দ্যাখো।

Example 6: Consider the metric space $\mathbb{R}^{5\times 5}$ of all 5×5 real matrices under Euclidean metric.

Is the set N of all nonsingular matrices a connected set in this metric space?

SOLUTION:

> We know that the determinant function $\det : \mathbb{R}^{5\times 5} \to \mathbb{R}$ is a continuous function.

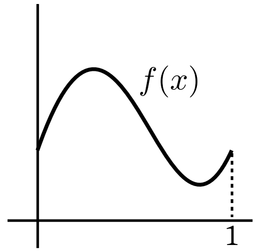


Fig 9

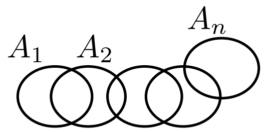


Fig 10

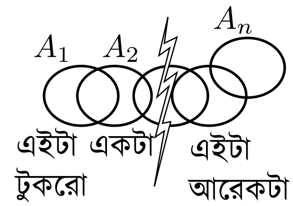


Fig 11

আমরা জানি যে, nonsingular matrix-দের determinant হয় non-zero. বিপরীত পক্ষে যেকোনো non-zero সংখ্যাই কোনো না কোনো 5×5 nonsingular matrix-এর determinant হয়, কারণ কোনো $a \neq 0$ দেওয়া থাকলে আমরা এই diagonal matrix-টা বানাতে পারি--

$$\begin{bmatrix} a & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}_{5\times 5},$$

যার determinant হল a.

> Also, $\det(N) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, which is not connected in $\mathbb{R}$.
> $\because$ Continuous image of a connected set must be connected,
> $\therefore N$ cannot be connected.

■

এরকম আরো কয়েকটা অংক দিই তোমার নিজে নিজে করার জন্য।

Exercise 7: Consider the metric space $C[0,1]$ of all continuous functions from $[0,1]$ to $\mathbb{R}$ under the sup-metric. Let A denote the set of all $f \in C[0,1]$ such that $f(1) \neq 5$. Is A connected? Justify your answer. ■

Exercise 8: Consider the metric space $C[0,1]$ of all continuous functions from $[0,1]$ to $\mathbb{R}$ under the sup-metric. Let B denote the set of all $f \in C[0,1]$ such that $f(0) \neq f(1)$. Is B connected? Justify your answer. ■

এবার একটা ঠকানো প্রশ্ন দিই।

Exercise 9: ধরো (X,d) আর (Y,d) দুটো metric space. এদের মধ্যে একটা continuous function দেওয়া আছে $f: X \to Y$. যদি $A \subseteq X$ একটা disconnected set হয় (মানে connected না হয়), তবে কি $f(A)$-ও Y-এর মধ্যে একটা disconnected set হতে বাধ্য? ■

Connectedness আর continuity-র মধ্যে একটা সম্পর্ক তো দেখলে। এবার আরেকটা সম্পর্কের কথা বলি। যদি তোমাকে $f: [0,1] \to \mathbb{R}$-এর একটা গ্রাফ দিই Fig 9-এর মত, তুমি এক ঝলক তাকিয়েই বলে দেবে যে f-টা continuous. ভালো করে ভেবে দ্যাখো, তোমার মাথার মধ্যে কী চিন্তা খেলে গেল। তুমি কাগজের পাতায় আঁকা গ্রাফটা দেখলে, কাগজের

পাতা অর্থাৎ কিনা $\mathbb{R}^2$. তার মধ্যে গ্রাফটা হল একটা subset. বিশদ করে লিখলে $G = \{(x, f(x)) \ : \ x \in [0,1]\}$. তুমি যেটা দেখলে সেটা হল G-টা পুরো একটানা, কোথাও কোনো ভাঙা নেই। অমনি তুমি চট্‌ করে সিদ্ধান্ত করে ফেললে যে f-টা নিশ্চয়ই continuous. এর মানে কি এই যে, f-এর continuous হওয়া আর G-এর connected হওয়া সমার্থক? এ থেকেই জন্ম এবারের প্রশ্নটার। সাবধান, এটা কিন্তু ঝামেলার অংক, না পারলে মন খারাপ কোরো না!

Exercise 10: ধরো $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ হল কোনো একটা function. তাহলে f-এর গ্রাফ হল এই set-টা--

$$G = \{(x, f(x)) \ : \ x \in [0,1]\}.$$

তোমাকে দুটো বাক্য দিচ্ছি--

1. If G is connected then f must be continuous.
2. If f is continuous, then G must be connected.

এদের মধ্যে ঠিক একজনই সঠিক। কোন্‌টা? ■

এবার একটা অন্য স্বাদের অংক দিই।

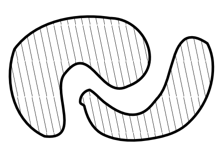
Exercise 11: একটা metric space-এ কয়েকটা connected subset দিলাম, $A_1, ..., A_n$. বলা আছে যে, প্রতিটা $i = 1, ..., n-1$-এর জন্যই $A_i \cap A_{i+1} \neq \phi$. দেখাতে হবে যে $\cup_1^n A_i$ অবশ্যই connected হতে বাধ্য।
HINT: ছবি দিয়ে ভাবলে Fig 10-এর মত করে ভাবতে পারো। Contradiction লাগালে সুবিধা হবে। ধরো একটা disconnection আছে। ব্যাপারটা তার মানে Fig 11-এর মত। এবার নিজে নিজে করো। ■

এবার আরেকটা অংক বলি যেটা তোমাকে ঝামেলায় ফেলবে। আগে আমরা দেখেছিলাম যে যাবতীয় nonsingular matrix-দের set হল connected. বলতে পারো, যাবতীয় singular matrix-এর set কি connected হবে? চিন্তা করতে থাকো। না পারলে দমে যেও না। আমরা এবার **path connectedness** নামে আরেকটা হাতিয়ার শিখব, যেটা দিয়ে এই অংকটা চট্‌ করে হয়ে যাবে।

DAY 24
Path connectedness (part 1)

আজকে আর কালকে আমরা path connectedness বলে একটা নতুন ধারণা শিখব। প্রথমেই একটা কথা কবুল করে রাখি। এই বইটা লেখা হচ্ছে CBCS সিলেবাসের কথা মাথায় রেখে। সেই সিলেবাসে কিন্তু path connectedness-এর উল্লেখ নেই। সুতরাং যারা সিলেবাসের বাইরে একচুলও যেতে চাও না, তারা আজকের এবং কালকের অংশটা বাদ দিয়ে সরাসরি পরের অধ্যায়ে চলে যেতে পারো। এই আলোচনাটুকু এ বইতে রাখার দুটো কারণ। এক, path connectedness ব্যাপারটা connectedness-এর সঙ্গে ওতপ্রোতভাবে জড়িত, এবং connectedness-এর চেয়ে বেশী সহজে বোঝা যায়। দুই, এটা

Fig 12



MCQ-এর যুগ, যেখানে কোনো উত্তর চট্ করে আন্দাজ করতে পারলে সুবিধা হয়, এবং কোন্ কায়দায় আন্দাজ করেছি সেটা লিখে বোঝাবার দরকার হয় না। সেই কাজে path connectedness ভীষণ উপযুক্ত।
যাই হোক, এবার তবে আলোচনাটা শুরু করি।
যদি Fig 12-এর set-টা দ্যাখো, তবে নিশ্চয়ই তুমি বলবে যে ওটা connected নয়। দেখাই যাচ্ছে যে ওটা দুটো দ্বীপ নিয়ে তৈরী। এই দ্বীপগুলো যে এককেটা clopen set, সেটা তো গত দুদিনের আলোচনা থেকে শিখেই ফেলেছো। কিন্তু অত clopen-টোপেন না জেনেও একটা কথা বোঝাই যায়, যদি একজন একটা দ্বীপে থাকে, তবে তার পক্ষে স্থলপথে অন্য দ্বীপটায় যাওয়া সম্ভব নয়, অর্থাৎ তুমি স্থলভাগের মধ্যে দিয়ে এমন কোনো একটানা curve আঁকতে পারবে না, যেটা এই দ্বীপের একটা বিন্দু থেকে ওই দ্বীপের কোনো একটা বিন্দুতে যায়। এইরকম একটানা curve-কে আমরা continuous function বলে ভাবতে পারি। এখান থেকেই নীচের সংজ্ঞাটার জন্ম।

DEFINITION: Path connected

Let (X, d) be any metric space. Let $A \subseteq X$. We say that A is **path connected** if

$$\forall P, Q \in A \quad \exists \text{continuous } f : [0, 1] \to A \quad f(0) = P, f(1) = Q.$$

সংজ্ঞাটা দেখতে খটোমটো লাগলেও ছবি দিয়ে ভাবলে কিন্তু ব্যাপারটা তত জটিল নয়। এখানে $f(t)$-টাই হল আমাদের continuous curve-টা। মনে করো যেন আমরা পেন দিয়ে curve-টা আঁকছি। তাহলে $f(t)$ হল t মুহূর্তে পেনটার অবস্থান। Curve-টা আঁকা শুরু হচ্ছে $t = 0$ থেকে এবং শেষ হচ্ছে $t = 1$-এ।
এই সংজ্ঞাটা বলছে কোনো metric space-এর একটা subset-কে কখন path connected বলে। যদি subset-টা পুরো metric space-টাই হয়, তবে আমরা সেরকম metric space-কে বলব path connected metric space.
এবার সংজ্ঞাটাকে হজম করার জন্য কিছু সহজ উদাহরণ দেখব। প্রতি ক্ষেত্রেই আমাদেরকে একটা metric space-এর একটা subset দেওয়া থাকবে, আর আমাদের কাজ হবে তার যেকোনো দুটো সদস্যের মধ্যে একটা continuous curve বানানো। এই কাজে আমাদের ভীষণ সাহায্য করবে **convex combination** নামে একটা ধারণা।

24.1 Convex combination

একটা উদাহরণ দিয়ে শুরু করি।

Example 7: দেখাও যে ($\mathbb{R}^2$, Euclidean)-এর মধ্যে $A = \{(x, y) \ : \ |x|, |y| \leq 1\}$ হল একটা path connected set.

SOLUTION: এখানে A হল আসলে Fig 13-এর square-টা। দেখেই বোঝা যাচ্ছে এর যেকোনো বিন্দু থেকে যেকোনো বিন্দুতে একটানা যাওয়া যায়। যেমন Fig 14-এ যেকোনো দুটো বিন্দু P, Q নিয়ে তাদের মধ্যে নানারকম পথ দেখিয়েছি। বলাই বাহুল্য এদের মধ্যে সহজতম পথ হল সরলরেখা বরাবর যাওয়া। এরকম পথকে অংকের ভাষায় লিখে প্রকাশ করার একটা কৌশল আছে। সেটা নানা জায়গায় কাজে লাগে, তাই ভালো করে বুঝে নাও। যদি P আর Q যেকোনো দুটো বিন্দু

Fig 13

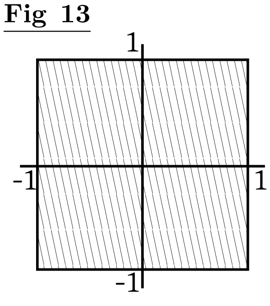


Fig 14

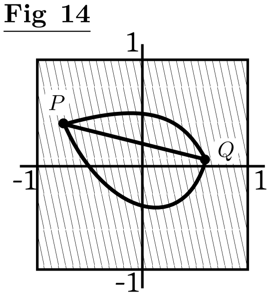


Fig 15

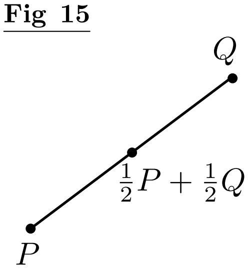
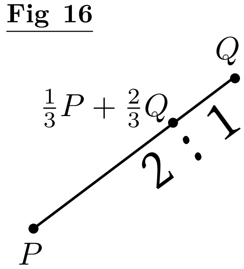


Fig 16



হয়, তাহলে $\frac{1}{2}P+\frac{1}{2}Q$ হল P আর Q-এর ঠিক মাঝখানের বিন্দুটা (Fig 15)। যদি $\frac{1}{3}P+\frac{2}{3}Q$ নাও, তবে সেটা হবে P থেকে Q পর্যন্ত লাইনটাকে যে বিন্দুটা $1:2$ অনুপাতে ভাগ করে সেই বিন্দুটা (Fig 16)। এইভাবে যাই $t \in [0,1]$ নাও না কেন $(1-t)P+tQ$ হবে ওই লাইনটার উপর একেকটা বিন্দু, $t=0$ নিলে পাবে P, আর t যতই বাড়তে বাড়তে 1-এর দিকে যাবে বিন্দুটাও ততই সেই লাইনটা বরাবর সরতে সরতে Q-তে গিয়ে হাজির হবে। সুতরাং $(1-t)P+tQ$-কে মনে করতে পারো যেন একটা সচল বিন্দু, যেটা P থেকে শুরু করে Q অব্‌ধি যাচ্ছে। এই $(1-t)P+tQ$-কে আমরা বলি P আর Q-এর **convex combination**. এখানে $t \in [0,1]$.
আবার আমাদের অংকের সমাধানে ফিরে আসি। শুরু করব সংজ্ঞাটা লিখে--

To show

$\forall P, Q \in A \quad \exists$continuous $f:[0,1]\to A \quad f(0)=P, f(1)=Q$.

$\forall P, Q$ Take any $P=(x_1,y_1)$ and $Q=(x_2,y_2)\in A$.

এবার আমরা convex combination-এর কৌশলটা লাগাব--

Let $f(t)=(1-t)P+tQ=\big((1-t)x_1+tx_2,(1-t)y_1+ty_2\big)$ for $t\in[0,1]$.

আমাদের পরীক্ষা করে দেখতে হবে এই f-টা যেন দুটো শর্ত পালন করে--এক, সব $t\in[0,1]$-এর জন্যই $f(t)\in A$ হতে হবে। আর দুই, $f:[0,1]\to A$-কে continuous হতে হবে।

Since $|x_1|,|x_2|,|y_1|,|y_2|\le 1$, hence for each $t\in[0,1]$,

$$|(1-t)x_1+tx_2|\le(1-t)|x_1|+t|x_2|\le(1-t)+t=1.$$

Similarly, $|(1-t)y_1+ty_2|\le 1$.

So $f:[0,1]\to A$.

এবার continuity দেখার পালা--

Also, since f is made of addition, subtraction and multiplication only, hence f is continuous.

$\exists f$ Choose this f.

Then $f(0)=(x_1,y_1)=P$ and $f(1)=(x_2,y_2)=Q$, as required.

■

আমরা দেখলাম যে $(1-t)P+tQ$-কে বলে P আর Q-এর convex combination (যেখানে $t\in[0,1]$) এবং ছবি দিয়ে ভাবলে এটাকে P আর Q-কে সরলরেখা দিয়ে যোগ করা বলে কল্পনা করা যায়। তবে এই ছবি দিয়ে ভাবাটা খালি $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ আর $\mathbb{R}^3$-তেই কাজ করে। কিন্তু convex combination-এর কায়দাটার দৌড় তার চেয়েও অনেক বেশী। কয়েকটা অংক দিয়ে ব্যাপারটা বোঝা যাক।

Exercise 12: দেখাও যে ($\mathbb{R}^5$, Euclidean)-এর মধ্যে

$$A=\{(x_1,...,x_5)\ :\ \forall i\quad |x_i|\le 1\}$$

হল path connected.

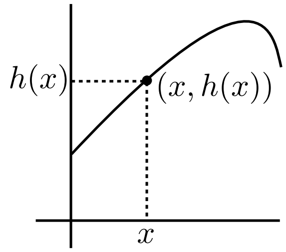


Fig 17

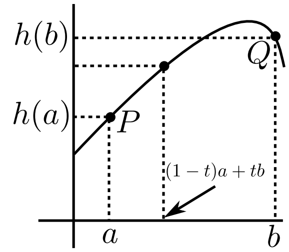


Fig 18

HINT: যেহেতু এখানে $\mathbb{R}^5$ নিয়ে কাজ হচ্ছে, তাই ছবি আঁকার কোনো সুবিধা নেই। কিন্তু convex combination-এর কৌশলটা এখানেও কাজ করবে। ■

ছবি আঁকা না গেলেও আমরা $\mathbb{R}^5$-এর মধ্যে সরলরেখা কল্পনা করতে পারি। কিন্তু অনেক সময়ে যেখানে আদৌ সরলরেখা নিয়ে কাজ হচ্ছে না, সেখানেও convex combination-এর কায়দাটা কাজে লেগে যায়। যেমন, যদি কাগজের পাতায় ফস্ করে পেন চালিয়ে খানিকটা একটানা আঁকাবাঁকা দাগ টানো, তবে $\mathbb{R}^2$-এর একটা subset পাবে। সেই subset-টা path connected হতে বাধ্য। নীচের অংকটা তারই একটা রূপ।

Example 8: ধরো $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ একটা continuous function. তাহলে দেখাও যে তার গ্রাফটা $\mathbb{R}^2$-এর মধ্যে path connected হবে।

SOLUTION: প্রথমে গ্রাফটাকে অংকের ভাষায় প্রকাশ করে নিই। যেকোনো $x \in \mathbb{R}$-এর জন্যই গ্রাফের উপরের বিন্দুটা হবে $(x, h(x))$. বোঝার জন্য Fig 17 দেখে নাও। সেই কারণে গ্রাফটা হল আসলে $\mathbb{R}^2$-এর এই subset-টা--

Let $G = \{(x, h(x)) \;:\; x \in \mathbb{R}\}$.

To show

$\forall P, Q \in G \quad \exists$continuous $f : [0,1] \to G \quad f(0) = P, f(1) = Q$.

$\boxed{\forall P, Q}$ Take any $P = (a, h(a)), Q = (b, h(b)) \in G$.

W.l.g., $a \leq b$.

যেকোনো দুটো বিন্দু নিলাম গ্রাফের উপরে, P আর Q. Fig 18 দেখে নাও। এবার convex combination-এর কৌশলটা দিয়ে একটা উপযুক্ত f বানাব।

We define $f : [0,1] \to G$ as $f(t) = \big((1-t)a + tb, h((1-t)a + tb)\big)$.

এই f-টাকে দেখাতে হবে continuous--

Since h is continuous, and $a + (b-a)t$ is a continuous function of t, hence their composition is also continuous. Thus f is continuous.

$\boxed{\exists f}$ Choose this f.

Clearly, $f(0) = \big(1 \times a + 0 \times b, h(1 \times a + 0 \times b)\big) = (a, h(a))$,

and $f(1) = \big(0 \times a + 1 \times b, h(0 \times a + 1 \times b)\big) = (b, h(b))$, as required.

■

একই কায়দায় নীচের theorem-টাও প্রমাণ করতে পারবে, চেষ্টা করেই দ্যাখো।

> **THEOREM**
>
> Let $f : X \to Y$ be a continuous function where (X, d_1), (Y, d_2) are two metric spaces. Then the set
> $$A = \{\big(x, f(x)\big) \ : \ x \in X\}$$
> is path connected in the metric space $(X \times Y, d)$ where
> $$d\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = d_1(x_1, x_2) + d_2(y_1, y_2).$$

Exercise 13: এই theorem-এর প্রমাণটা গুছিয়ে লেখো দেখি! ■

এবার convex combination কৌশলটার আরেকটা প্রয়োগ দেখব, যেখানে ব্যাপারটা মোটেই সরলরেখা দিয়ে দুটো বিন্দু যোগ করার মত নয়।

Example 9: আমাদের metric space-টা নেব $(C[0,1], d)$, যেখানে d হল sup-metric. এর মধ্যে A হল সেইসব function, যারা differentiable. প্রমাণ করো যে A হল path connected.

SOLUTION:

To show

$\forall P, Q \in A \quad \exists$continuous $f : [0,1] \to A \quad f(0) = P, \quad f(1) = Q.$

$\forall P, Q$ | Take any $P, Q \in A$.

এখানে notation নিয়ে একটু সাবধান, P আর Q দুজনেই কিন্তু আসলে $[0,1]$ থেকে $\mathbb{R}$-এ দুটো differentiable function. তাই $P(x)$ বা $Q(x)$ লিখলেই হয়তো দেখাত ভালো। কিন্তু path connectedness-এর সংজ্ঞাটা আমরা যেভাবে লিখেছি, তার সাথে সামঞ্জস্য রাখার জন্যই খালি P আর Q লিখেছি।
এবার আমরা convex combination-এর কৌশলটা লাগাব।

Fig 19

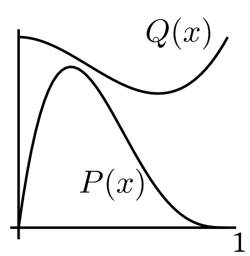
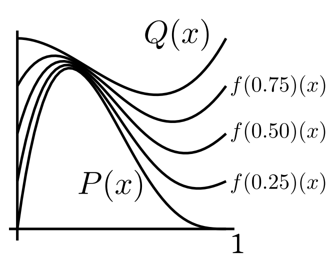


Fig 20



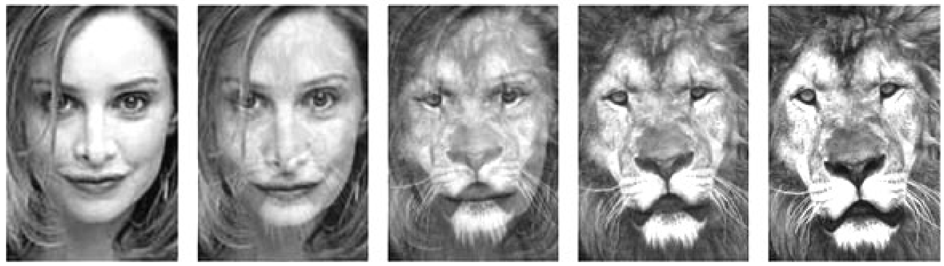


Fig 21

Let $f(t) = (1-t)P + tQ$ for $t \in [0,1]$.

সাবধান, এখানে কিন্তু t-এর প্রতিটা value-তে $f(t)$ একটা function, অর্থাৎ $f(t)(x)$. এই জায়গাটা গুলিয়ে গেলে Fig 19 দ্যাখো, যেখানে উদাহরণস্বরূপ একটা $P(x)$ আর একটা $Q(x)$-এর গ্রাফ দেখিয়েছি। এরা যেন একই সাপের দুটো অবস্থান। সাপটা প্রথমে $P(x)$ অবস্থানে ঘুমোচ্ছিল। তারপর হঠাৎ জেগে উঠে কিলবিল করে সরতে সরতে $Q(x)$ অবস্থানে উপস্থিত হল। এই কিলবিল করাটা দেখিয়েছি Fig 20-তে। শুরুতে, মানে $t = 0$-তে সাপটা ছিল $P(x)$ বরাবর, মানে $f(0)(x) = P(x)$. কিছুক্ষণ পরে $t = 0.25$-এ সাপটা এসেছে $f(0.25)(x)$ অবস্থানে। তারপর $f(0.50)(x)$ এবং $f(0.75)(x)$ হয়ে $t = 1$-এর পৌঁছে গেছে $Q(x)$-এ।

Since $P(x), Q(x)$ are differentiable, hence for each $t \in [0,1]$, the function $(1-t)P(x) + tQ(x)$ is differentiable w.r.t. x.

So $f : [0,1] \to A$.

এবার continuity দেখাতে হবে। কাজটা সংক্ষেপে সারার জন্য আমরা sequential criterion লাগাব।

If $\{t_n\}_n \subseteq [0,1]$ is such that $t_n \to t \in [0,1]$, then

$$\begin{aligned} d(f(t_n), f(t)) &= d\big((1-t_n)P + t_nQ, (1-t)P + tQ\big) \\ &= \sup\{|(1-t_n)P + t_nQ - (1-t)P - tQ| \ : \ t \in [0,1]\} \\ &= \sup\{|(t-t_n)P + (t_n - t)Q| \ : \ t \in [0,1]\} \\ &= |t_n - t| d(P,Q) \to 0, \end{aligned}$$

since $t_n \to t$.

So $f : [0,1] \to A$ is continuous.

$\exists f$ Choose this f.

Clearly, $f(0) = P$ and $f(1) = Q$, as required.

■

Convex combination-এর কৌশলটার জন্যই মূলতঃ path connectedness নিয়ে কাজ করাটা সহজ হয়। অবশ্য convex combination-এর ধারণাটা অংকের দুনিয়ায় আরো বহু জায়গাতেও কাজে লাগে। সিনেমায় অনেক সময়ে দেখবে একটা মানুষের মুখ চোখের সামনে বদলাতে বদলাতে সিংহের মুখ হয়ে গেল (Fig 21)। সেখানেও convex combination-এর কৌশলটা ব্যবহার করা হয়।

DAY 25
Path connectedness (part 2)

আমরা আজকেও path connectedness নিয়ে আলোচনা করব। আবার মনে করিয়ে দিই যে, এটা সিলেবাস-বহির্ভূত আলোচনা। যারা সিলেবাসের গণ্ডীর বাইরে যেতে চাও না, তারা আজকের দিনটা বাদ দিয়ে যেতে পারো।

25.1 Connected বনাম path connected

আন্দাজ করতে পারছ নিশ্চয়ই যে, path connected হলে connected হতেও বাধ্য। কারণ যেকোনো দুটো বিন্দু দেওয়া থাকলেই যদি এরকম একটানা লাইন টানা যায়, তবে সেরকম set অবশ্যই connected না হয়ে যায় না। তবে যেটা আন্দাজ করা দুঃসাধ্য সেটা হল যে এর উল্টো দিকটা খাটে না! মানে এমন set সম্ভব, যেটা connected, কিন্তু তার মধ্যে এমন দুটো বিন্দু আছে, যার একটা থেকে অন্যটায় এরকম একটানা লাইন আঁকা যায় না! এই ধরণের একটা বিদ্‌ঘুটে counterexample আমরা কিছু পরে দেখব। প্রথমে সহজ দিকটা প্রমাণ করি।

THEOREM

A path connected set in a metric space must be connected.

Proof:

> Let (X, d) be any metric space.
> Let $A \subseteq X$ be path connected. Shall show A is connected.

আমরা contradiction-এর পথে এগোব--

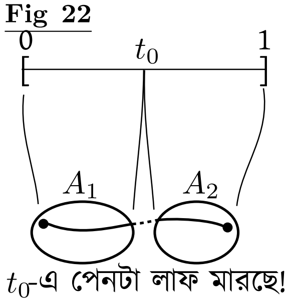
> Let, if possible, A be not connected.

তাহলে একটা disconnection থাকবে--

> Let $A = A_1 \cup A_2$ be a disconnection.

এবার আমরা A_1-এর কোনো বিন্দু থেকে A_2-র কোনো বিন্দু পর্যন্ত একটানা একটা লাইন আঁকব।

Fig 22



> Let us take some $a_1 \in A_1$ and $a_2 \in A_2$ (possible $\because A_1, A_2 \neq \phi$).
> Since A is path connected, hence there is a continuous function $f : [0,1] \to A$ such that $f(0) = a_1$ and $f(1) = a_2$.

দেখা যাক পেনটা কখন A_1-এ থাকছে আর কখন A_2-তে। মানে $f^{-1}(A_1)$ আর $f^{-1}(A_2)$ নিয়ে কাজ করব। Fig 22 দ্যাখো। দেখতেই পাচ্ছ t_0 মুহূর্তে পেনটা লাফ দিয়ে A_1 থেকে A_2-তে যাচ্ছে। কিন্তু f-টা continuous হওয়ায় এমনটা তো হতে পারে না। এই contradiction-টাকেই আমরা connectedness ব্যবহার করে গুছিয়ে লিখব।

> Let $B_1 = f^{-1}(A_1)$ and $B_2 = f^{-1}(A_2)$.

আমরা দেখাব যে, এই B_1 আর B_2 মিলে $[0,1]$-এর একটা disconnection হয়। সেটা একটা contradiction, কারণ $[0,1]$ আমরা জানি connected (যেকোনো interval-ই connected হয়)। একে একে disconnection-এর শর্তগুলো পরীক্ষা করা যাক। প্রথম শর্ত, nonempty--

> Since $A_1, A_2 \neq \phi$, hence $B_1, B_2 \neq \phi$.

দ্বিতীয় শর্ত, $B_1 \cap B_2 = \phi$:

> Since $A_1 \cap A_2 = \phi$, hence by property of preimage,
>
> $$B_1 \cap B_2 = f^{-1}(A_1) \cap f^{-1}(A_2) = f^{-1}(A_1 \cap A_2) = f^{-1}(\phi) = \phi.$$

তৃতীয় শর্ত, $B_1 \cup B_2 = [0,1]$:

> Also $B_1 \cup B_2 = [0,1]$.
>
> [[Because:
>
> Since f has domain $[0,1]$, hence $B_1, B_2 \subseteq [0,1]$. So $B_1 \cup B_2 \subseteq [0,1]$.
> Conversely, if $t \in [0,1]$, then $f(t) \in A = A_1 \cup A_2$.
> So $t \in f^{-1}(A_1 \cup A_2) = f^{-1}(A_1) \cup f^{-1}(A_2) = B_1 \cup B_2$.
>
>]]

চতুর্থ শর্ত, B_1, B_2 দুজনেই $[0,1]$-এর মধ্যে open--

> Since A_1, A_2 are open in A and $f : [0,1] \to A$ is continuous, hence $f^{-1}(A_1)$ and $f^{-1}(A_2)$ must be open in $[0,1]$.

ব্যস্‌, সবগুলো শর্তই পালিত হয়েছে। অতএব--

> Thus, $[0,1] = B_1 \cup B_2$ is a disconnection ($\Rightarrow\Leftarrow \because$ intervals are connected in $\mathbb{R}$).

[Q.E.D]

Path connected-এর ধারণাটা সিলেবাসে না থাকা সত্ত্বেও কেন এখানে আলোচনা করছি, তার প্রধান কারণ হল এই theorem-টাই। অনেক সময়ে কোনো একটা metric space-এর একটা subset দিয়ে যদি সেটাকে connected দেখাতে বলে, তবে মুশকিলে পড়ে যেতে হয়। এরকম ক্ষেত্রে অনেক সময়ে path connected দিয়ে চিন্তা করলে সুবিধা হয়। কারণ "কোনো disconnection নেই" দেখানোর চেয়ে "যেকোনো বিন্দু থেকে অন্য যেকোনো বিন্দুতে যাবার একটানা পথ আছে" দেখানোটা সাধারণতঃ[2] সহজ। আর সেটা দেখাতে পারলেই এই theorem-টার দৌলতে connected-ও দেখানো হয়ে গেল। এরকম কিছু উদাহরণ দেব এবার।

Example 10: Consider the metric space $\mathbb{R}^{n\times n}$ of all $n\times n$ real matrices, with the Euclidean metric. Is the set S of all symmetric matrices connected in this space?

SOLUTION: এরকম অংক প্রথমে দেখলে বোঝা যায় না কী করে এগোনো উচিত। এখানে path connected দিয়ে ভাবলে সুবিধা হবে।

> We shall show that S is path connected, and hence connected.
>
> To show
>
> $\forall P, Q \in S \quad \exists$continuous $f : [0,1] \to S \quad f(0) = P, f(1) = Q.$
>
> $\boxed{\forall P, Q}$ Take any $P, Q \in S$.
>
> Define $f : [0,1] \to \mathbb{R}^{n\times n}$ as $f(t) = (1-t)P + tQ$.

আমরা এখানেও সেই convex combination-এর কৌশলটা লাগিয়েছি। এই $(1-t)P + tQ$-কে মনে করতে পারো যেন একটা সচল matrix, যেটা P থেকে শুরু করে ক্রমশঃ বদলাতে বদলাতে Q-তে পরিণত হয়।

> Since P, Q are symmetric, so it $(1-t)P + tQ$. Hence $f : [0,1] \to S$.
>
> Also, each component of $f(t)$ is a linear function of t, and hence continuous.
>
> $\boxed{\exists f}$ Choose this f.
>
> Clearly, $f(0) = P$ and $f(1) = Q$, as required.

■

একই কায়দায় নীচের দুটো অংক ঘায়েল হবে।

Exercise 14: Consider the set $X \subseteq \mathbb{R}^n$ of all solutions of a system $A\vec{x} = \vec{b}$, where A is an $n\times n$ real matrix and $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ is a given vector. Show that X is a connected set in $\mathbb{R}^n$ under Euclidean metric. ■

Exercise 15: Let $C[0,1]$ be the metric space of all continuous functions from $[0,1]$ to $\mathbb{R}$ under sup-metric. Let D denote the subset of $C[0,1]$ consisting of all differentiable functions. Show that D is connected.

HINT: গতকাল আমরা Example 9 করেছিলাম[3]। ওই সমাধানটা ব্যবহার করে এই অংকটা এক লাইনে হয়ে যায়। ■

---

[2] বিশেষ করে convex combination-এর কৌশলটা ব্যবহার করে।

[3] 177 নম্বর পাতার ধারেকাছে কোথাও।

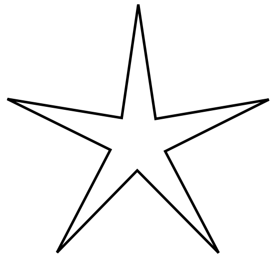


Fig 23



Fig 24

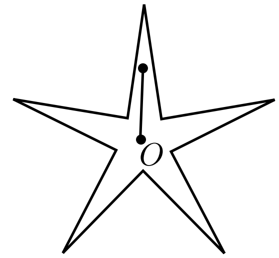


Fig 25

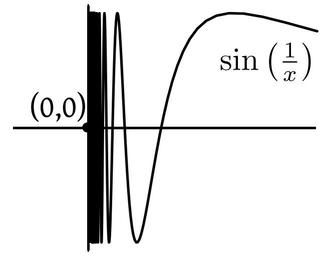


Fig 26

Exercise 16: Consider $C[0,1]$ as in the last problem. Let A be the set consisting all functions, h, in $C[0,1]$ such that $h(0) = h(1)$. Is A connected? ■

আগে আমরা দেখেছিলাম যে, যাবতীয় $n \times n$ সাইজের nonsingular matrix-রা মিলে একটা disconnected set হয়। কিন্তু singular matrix-রা মিলে কীরকম set হয়, সেটা তখন বার করতে পারি নি। নীচের অংকে সেটাই বার করার হদিশ রয়েছে।

Exercise 17: Is the set of all singular matrices a connected set in the space of all $n \times n$ real matrices?

HINT:

এখানে কিন্তু convex combination-এর কায়দাটা সরাসরি খাটবে না, কারণ P, Q দুজনেই singular matrix হলেও $(1-t)P + tQ$-টা singular নাও হতে পারে, যেমন $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ আর $Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ নিলে $\det(P) = \det(Q) = 0$ কিন্তু

$$\det\big((1-t)P + tQ\big) = \det \begin{bmatrix} 1-t & 2-2t \\ 3t & 4t \end{bmatrix} = -2t(1-t).$$

কিন্তু এখানেও একই কৌশল সামান্য অন্যভাবে লাগানো যাবে। ধরো A যেকোনো একটা singular matrix. তুমি ওটাকে শূন্য matrix মানে O-তে নিয়ে ফেলতে পারো আমাদের পরিচিত কৌশলে $(1-t)A + tO = (1-t)A$. এবার কিন্তু যেকোনো $t \in [0,1]$-এর জন্যই এটা একটা singular matrix. সুতরাং সব singular matrix থেকেই O-তে যাওয়া যাচ্ছে continuous-ভাবে। যদি ছবি দিয়ে ভাবতে চাও, তবে যাবতীয় singular matrix-এর set-টাকে কতকটা Fig 23-এর মত একটা তারা বলে ভাবতে পারো। এর প্রতিটা বিন্দুই একেকটা singular matrix. যেকোনো দুটো বিন্দুকে সরাসরি লাইন টেনে যোগ করতে গেলে লাইনটা set-টার বাইরে চলে যেতে পারে (Fig 24)। কিন্তু O বসে আছে মধ্যিখানে, তার সঙ্গে যেকোনো বিন্দুকেই লাইন টেনে যোগ করা চলে (Fig 25)। এবার চিন্তা করো। ■

25.2 Connected, কিন্তু path connected নয়

এবার একটা বিদ্ঘুটে counterexample দেব, যেটা দেখাবে যে connected হলেও একটা metric space-এর subset কিন্তু path connected নাও হতে পারে। সাবধান, উদাহরণটা কিন্তু একটু জটিল। ভালো না লাগলে স্বচ্ছন্দে বাদ দিয়ে যেতে পারো।

Example 11: Give an example of a subset of a metric space that is connected, but not path connected.

SOLUTION: এরকম একটা জিনিস কীরকম অদ্ভুত ভাবো, পুরো subset-টা একটাই খণ্ড দিয়ে তৈরী, অথচ তার মধ্যে এমন দুটো বিন্দু পাওয়া যাচ্ছে যার একটা থেকে অন্যটায় একটানা যাওয়া যায় না! এমন আজব জিনিসও যে সম্ভব, সেই স্বাদটা দেওয়ার জন্যই এই অংকটা করছি।

আমরা এখানে কাজ করব কিন্তু অতি পরিচিত একটা metric space নিয়ে, ($\mathbb{R}^2$, Euclidean), যেটা ছবি এঁকে দিব্যি বোঝা যায়।

> We consider the metric space ($\mathbb{R}^2$, Euclidean).
> Let $S = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; y = \sin\frac{1}{x},\; x > 0\right\} \cup \{(0, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

ছবিটা দেখিয়েছি Fig 26-এ। এটা বস্তুতঃ এই function-টার গ্রাফ--

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}.$$

> We consider Euclidean metric on $\mathbb{R}^2$.

আমাদের দুটো জিনিস দেখাতে হবে--এক, S-টা connected. এবং দুই, S-টা path connected নয়।

> Step 1: Shall show that S is connected.

এবার কী করতে চলেছি সেটা ছবি দিয়ে বুঝে নিলে সুবিধা হবে। S-টা দুটো জিনিস দিয়ে তৈরী--এক, $\sin\frac{1}{x}$-এর আঁকাবাঁকা গ্রাফটা (যখন $x > 0$), আর দুই, $(0, 0)$ বিন্দুটা। এর মধ্যে আঁকাবাঁকা অংশটা যে connected সেটা বোঝাই যাচ্ছে, কারণ $x > 0$ হলে $\sin\frac{1}{x}$-একটা continuous function. সমস্যা হতে পারে ওই $(0, 0)$ বিন্দুটাকে নিয়ে। কিন্তু আঁকাবাঁকা অংশটা $x = 0$-র কাছে এসে খুব ঘনঘন ওঠানামা করতে করতে একেবারে $(0, 0)$-র গায় এসে পড়ছে, তাই $(0, 0)$-টা কিন্তু মোটেই একটা বিচ্ছিন্ন টুকরো হতে পারছে না। সেই কারণেই S-টা connected হবে।
অংকের ভাষায় গুছিয়ে লেখার সময়ে contradiction ব্যবহার করব।

> Let, if possible, S be not connected.
> Let $S = A \cup B$ be a disconnection.

এইবার আমরা সেই আঁকাবাঁকার গল্প শুরু করব। প্রথমে আঁকাবাঁকা অংশটার একটা নাম দিয়ে নিই--

> Let $C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; y = \sin\frac{1}{x},\; x > 0\right\}$.

লক্ষ করো যে C হল $\sin\frac{1}{x}$-এর গ্রাফ যখন $x > 0$. যেহেতু $x > 0$ হলে $\sin\frac{1}{x}$ হচ্ছে continuous, তাই C নিশ্চয়ই path connected. এইটার সঙ্গেই আমরা contradiction বাঁধাব। আমরা C-এর একটা disconnection বার করে দেব, $C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

> Since A, B are disjoint open sets in S, and $S = A \cup B$ and $C \subseteq S$,
> hence $A \cap C$ and $B \cap C$ are disjoint open subsets of C and $C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Disconnection-এর সবগুলো শর্তই প্রায় এক ধাক্কায় প্রমাণ হয়ে গেল। বাকি রইল খালি একটা, $A \cap C$ আর $B \cap C$ দুজনকেই nonempty দেখাতে হবে।

> We know that $(0, 0) \in S$.
> W.l.g., $(0, 0) \in A$.

এখানে w.l.g.-র গল্পটা বুঝলে তো? $(0, 0)$ যখন S-এর মধ্যে আছে, তখন সেটা হয় A আর নয় তো B-এর মধ্যে পড়েছে। কোনটাকে A আর কোনটাকে B নাম দিচ্ছি, তাতে তো কিছু এসে যায় না, তাই যেই টুকরোটায় $(0, 0)$ পড়েছে, সেটাকেই A নাম দিলাম।

> Since $S = C \cup \{(0,0)\}$ and $(0,0) \notin B$, hence $B \subseteq C$.

এই জিনিসটা ঠাণ্ডা মাথায় বুঝে নাও।

> Hence $B \cap C = B \neq \phi$.

এবার দেখাতে হবে $A \cap C \neq \phi$. সেটা দেখানো সামান্য জটিল। যদি $A \cap C = \phi$ হত, তবে $B \cap C = C$ মানে $C \subseteq B$ হয়ে যেত। যেহেতু $B \subseteq C$ আছেই, তাই এর মানে দাঁড়াচ্ছে $B = C$. কিন্তু সেটা অসম্ভব, কারণ B হল closed in S, কিন্তু C তা নয়। গুছিয়ে লেখা যাক--

> Note that C is not closed, since $(0,0) \notin C$ is a limit point of C.
>
> ⟦ Because:
>
> If we take $x_n = \frac{1}{n\pi}$ for $n \in \mathbb{N}$, then $\sin\frac{1}{x_n} = \sin n\pi = 0$. So $\{(x_n, 0)\}_n \subseteq C$. It is a sequence with distinct terms and $(x_n, 0) \to (0,0)$.
>
> ⟧

এখানে "distinct" শব্দ কেন লাগল বলি। যদি কোনো set থাকে M আর তার মধ্যে কোনো $\{p_n\}_n$ দেওয়া থাকে যাতে $p_n \to \alpha$ হয়, তবেই কিন্তু জোর দিয়ে বলা যায় না যে α-টা M-এর একটা limit point হবে। যেমন $M = (1,2) \cup \{3\}$ হলে যদি $p_n \equiv 3$ নিই, তবে $p_n \to 3$ হবে, কিন্তু 3 মোটেই $(1,2) \cup \{3\}$-এর limit point নয়। কিন্তু যদি sequence-এর term-গুলো সবাই আলাদা আলাদা, মানে distinct হত, তবে এই সমস্যা হতে পারত না।

> Now, by definition of a disconnection, B is closed in S.
> So $B \neq C$. Hence $B \subsetneq C$. Thus $A \cap C \neq \phi$.

ব্যস্, disconnection-এর সব শর্তই পেয়ে গেলাম।

> Hence $C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ is a disconnection ($\Rightarrow\Leftarrow \because C$ is connected).

এবার অন্য অংশটা, মানে S-কে path connected নয় দেখানো। কায়দাটা ছবি দিয়ে বুঝে নেওয়া সহজ। আমরা চেষ্টা করব আঁকাবাঁকা গ্রাফটা থেকে একটানা কোনো curve বরাবর $(0,0)$-তে পৌঁছতে। বুঝতেই পারছ যে, সেটা করা যাবে না, কারণ আঁকাবাঁকা curve-টা খালি অসংখ্যবার ওঠানামাই করে চলবে, কোনো দিনই $(0,0)$-তে পৌঁছবে না।

Fig 27

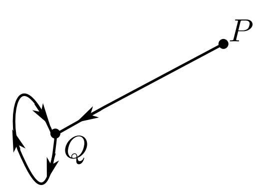
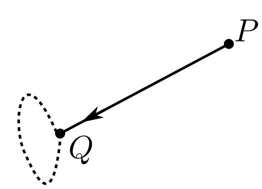


Fig 28



> Step 2: Let, if possible, S be path connected. We take $P = (1, \sin 1)$ and $Q = (0, 0)$.

এখানে P হল আঁকাবাঁকা curve-এর উপর যেকোনো একটা বিন্দু। অন্য কোনো বিন্দু নিলেও আপত্তি ছিল না।

> Then we can find a continuous function $f : [0,1] \to X$ with $f(0) = P$ and $f(1) = Q$.
> W.l.g., we can assume that $f(t) \neq Q$ for $t < 1$.

এই জায়গাটায় একটু প্যাঁচ কষলাম। এখানে $f(t)$ যেন একটা curve যেটা P-তে শুরু Q-তে শেষ। এমন হতেই পারে যে, curve-টা Q-তে কয়েকবার ফিরে ফিরে এসেছে (Fig 27)। সেক্ষেত্রে আমরা P থেকে Q-তে প্রথমবার আসা পর্যন্ত curve-টা নিয়ে কাজ করব (Fig 28)।

> Let $f(t) = (x(t), y(t))$.
> Since $\forall t \in [0,1) \quad f(t) \in C$, hence $\forall t \in [0,1) \quad y(t) = \sin \frac{1}{x(t)}$.

এইবার আমরা এই curve-টা বরাবর এগোতে থাকব, তাহলে $(0,0)$-তে পৌঁছোনর কথা। অর্থাৎ $\lim_{t \to 1-} x(t) = 0$ এবং আর $\lim_{t \to 1-} y(t) = 0$ হবেই।

> $\because f(1) \equiv \big(x(1), y(1)\big) = (0,0)$, and f is continuous,
> $\therefore \lim_{t \to 1-} x(t) = \lim_{t \to 1-} y(t) = 0$.
> But for $t < 1$, we have $y(t) = \sin \frac{1}{x(t)}$.
> So if $\lim_{t \to 1-} x(t) = 0$, then $\lim_{t \to 1-} y(t)$ does not exist $(\Rightarrow\Leftarrow)$.

■

এবার একটা ফিচেল প্রশ্ন দিই।

Exercise 18: (X, d) বলা আছে path connected. তার মধ্যে $S \subseteq X$ বলে দিচ্ছি connected. বলো তো S-টা কি path connected হতে বাধ্য?
HINT: এক্ষুণি যা আলোচনা করেছি, তার মধ্যেই উত্তর লুকিয়ে আছে। ■

Answers

1. A, B মোটেই connected নয়, কিন্তু C অবশ্যই connected. **2.** $2^4 - 1 = 15$-টা, কারণ মোট 4-টে "টুকরো" আছে। 1 বিয়োগ করেছি, কারণ ϕ-টাকে বাদ দিয়েছি। **3.** না, এখানে সব subset-ই তো clopen! **4.** অসম্ভব! কারণ যাই metric দাও, d, অবশ্যই $d(0,1) > 0$ হবে। এবার $r = d(0,1)/2$ নিলে $N(0,r) = \{0\}$ এবং $N(1,r) = \{1\}$ হবে। তাই $\{0\}$ আর $\{1\}$ দুজনেই open. সুতরাং $\{0\} \cup \{1\}$ একটা disconnection. **5.** A, B অবশ্যই clopen হবে। **6.** যেকোনো $a \in Y$-এর জন্যই $\{a\}$ হল Y-এর মধ্যে clopen. অতএব $f^{-1}(\{a\})$-কে হতে হবে $\mathbb{R}$-এর মধ্যে clopen. তাই $f^{-1}(\{a\})$ হবে হয় $\mathbb{R}$ নয়তো ϕ. **7.** না, $f \mapsto f(1)$ একটা continuous function. এর ফলে A-র image হল $(-\infty, 5) \cup (5, \infty)$, যেটা ($\mathbb{R}$, Euclidean)-এর মধ্যে disconnected. **8.** না। এখানে $f \mapsto f(0) - f(1)$ একটা continuous function. এর ফলে B-এর image হল $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, যেটা ($\mathbb{R}$, Euclidean-এর মধ্যে disconnected. **9.** না। যেমন $X = Y = \mathbb{R}$ আর $f(x) \equiv 5$ নাও। তাহলে $A = \{0, 1\}$

মোটেই connected নয়, কিন্তু $f(A) = \{5\}$ অবশ্যই connected. **10.** দ্বিতীয়টাই খালি ঠিক। ধরো f-টা continuous. এই function-টা নাও, $F : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, যেখানে $F(x) = (x, f(x))$. দেখাও যে F-টা continuous হবে। এবার লক্ষ করো, $G = F\big([0, 1]\big)$. যেহেতু $\mathbb{R}$ নিজে connected, অতএব G-ও connected হতে বাধ্য। প্রথমটা যে ভুল, তার একটা counterexample হল $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \sin\frac{1}{x} & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{array} \right.$. এটা কেন counterexample, সেটা এই অধ্যায়ের শেষে গিয়ে প্রমাণ করব। **14.** যদি $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in X$ হয়, তবে $f(t) = (1 - t)\vec{x}_1 + t\vec{x}_2$ নাও। লক্ষ করো, $f : [0, 1] \to X$ একটা continuous function, এবং $f(0) = \vec{x}_1$ আর $f(1) = \vec{x}_2$. যুক্তিটা $X = \phi$ হলেও খাটবে, vacuously. **15.** যদি $P, Q \in D$ হয়, তবে $f(t) = (1 - t)P + tQ$ নিলে $f : [0, 1] \to D$ একটা continuous function হবে, যেখানে $f(0) = P$ আর $f(1) = Q$. **16.** হ্যাঁ, আসলে path connected. **17.** হ্যাঁ। যেকোনো দুটো singular matrix যদি দেওয়া থাকে, P, Q, তবে প্রথমে P থেকে O-তে যাও, তারপর O থেকে Q-তে। ব্যস্!
18. না। একটা counterexample হল $X = (\mathbb{R}^2$, Euclidean) আর S হল আগের অংকের set-টা।

Chapter VI
Compact set

DAY 26
Compact-এর গোড়ার কথা (part 1)

এই অধ্যায়ে আমরা compact set বলে একটা জিনিস শিখব। Metric space-এর অধিকাংশ ধারণার মতই এরও জন্ম real analysis থেকেই। সেই যোগসূত্রটা আগে বুঝে নিই। Real analysis শেখার সময়ে আমরা শিখেছিলাম কোনো $A \subseteq \mathbb{R}$-কে কখন closed বলে, আর কখনই বা bounded বলে।

Example 1: নীচের set-গুলো কে বা কারা $\mathbb{R}$-এর মধ্যে closed এবং কে বা কারা bounded বলো।

(*i*) $[0,1)$, (*ii*) $[0,1]$, (*iii*) $\{0,1\}$, (*iv*) $\mathbb{N}$,

SOLUTION:

(i) $[0,1)$ মোটেই closed নয়, কারণ ওর একটা limit point হল 1, যেটা set-টার বাইরে। কিন্তু bounded.

(ii) $[0,1]$ একই সঙ্গে closed এবং bounded.

(iii) $\{0,1\}$-ও তাই।

(iv) $\mathbb{N}$ অবশ্য closed, কিন্তু bounded নয়।

■

Exercise 1: নীচে প্রতি ক্ষেত্রে $\mathbb{R}$-এর একেকটা subset দেওয়া রয়েছে। বলতে হবে এদের মধ্যে কারা closed এবং কারা bounded?

(*i*) $\mathbb{Z}$ (*ii*) $\{\sin x \ : \ x \in \mathbb{R}\}$ (*iii*) $\left\{x \in \mathbb{R} \ : \ \sin x = \frac{1}{2}\right\}$ (*iv*) ϕ (*v*) $\mathbb{R}$ (*vi*) $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ (*vii*) any finite subset of $\mathbb{R}$.

■

$\mathbb{R}$-এর যেসব subset একইসঙ্গে closed এবং bounded, তাদের কিছু ধর্ম আছে, যার জন্য real analysis শেখার সময়ে ওদের গুরুত্ব অনেক। এইরকম কয়েকটা ধর্ম প্রথমে মনে করিয়ে দিই।

26.1 $\mathbb{R}$-এর মধ্যে একই সঙ্গে closed আর bounded হবার সুবিধা

যে ধর্মগুলোর কথা বলতে যাচ্ছি, সেগুলো সবই real analysis থেকেই আমাদের জানা থাকার কথা। তবে এদের কথা যদি ভুলে গিয়ে থাকো, তবে ঘাবড়ে যেও না। বস্তুতঃ এগুলো যে সত্যিই উপকারী ধর্ম, সেটা উপলব্ধি করতে বড় বড় গণিতজ্ঞদেরও বিস্তর সময় লেগেছিল। এবং সেই উপলব্ধি থেকে compact-এর ধারণা অবধি পৌঁছতে ব্যয় হয়েছিল আরো অনেকটা সময়।

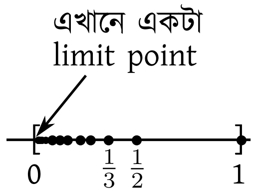


Fig 1

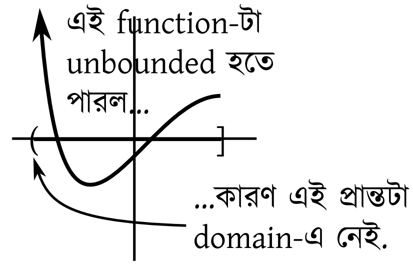


Fig 2

সেই দিক দিয়ে দেখতে গেলে এই ধারণাটা এই বইতে আলোচিত অন্যান্য ধারণার চাইতে একটু বেশীই abstract. ধীরে ধীরে পড়ো, তাড়াহুড়ো করলে গুলিয়ে যেতে পারে।
যাই হোক, এবার তবে সেই সব উপকারী ধর্মগুলোর তালিকাটা দিই--

- যদি $K \subseteq \mathbb{R}$ হয় closed and bounded, তবে K-র ভিতরে যাই infinite subset নাও না কেন, তার অন্ততঃ একটা limit point থাকবেই K-র মধ্যেই। এটা ছিল real analysis-এর Bolzanno-Weierstrass theorem. একটা উদাহরণ রয়েছে Fig 1-এ। এখানে $K = [0, 1]$-এর মধ্যে $\left\{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$ নিয়েছি। এর limit point হল $0 \in [0, 1]$. এই ধর্মটাকে উপকারী বলার অন্যতম কারণ এই যে, এটা আমাদের একটা সহজ বুদ্ধির গাণিতিক রূপ--"ছোটো ঘরে অসংখ্য জিনিস ঢোকাতে গেলে ঘরের মধ্যে গাদাগাদি হতে বাধ্য।" এখানে "ছোটো ঘর" হল গিয়ে bounded. তাতে "অসংখ্য জিনিস ঢোকানো" মানে infinite subset, আর "গাদাগাদি" অর্থাৎ limit point. আর যেহেতু set-টা closed নিয়েছি, তাই গাদাগাদিটা ঘরে মধ্যেই, কারণ closed set-এর limit point-রা set-এর মধ্যেই থাকে।

- এই একই ধর্মের আরেকটা সংস্করণ ছিল, সেটা sequence দিয়ে--যদি K হয় closed and bounded, তবে K-র মধ্যে যাই infinite sequence নাও না কেন, তার অন্ততঃ একটা subsequence পাবেই, যেটা K-র মধ্যেই কোথাও একটা converge করে।

- ধরো $K \subseteq \mathbb{R}$ হল closed and bounded. কোনো $f : K \to \mathbb{R}$ নাও যেটা continuous, তবে f-টা bounded হতে বাধ্য। ব্যাপারটা বুঝবে Fig 2 আর Fig 3 তুলনা করলেই। এটা উপকারী ধর্ম কেন? কারণ একটা function-এর পক্ষে continuous হওয়াও ভালো গুণ, আবার bounded হওয়াও ভালো গুণ। যদি domain-টা closed এবং bounded হয়, তবে continuous হলেই bounded হওয়াটা ফ্রী পাওয়া যাচ্ছে! ভালো নয়?

- যদি $K \subseteq \mathbb{R}$ একটা closed and bounded set হয়, তবে যেকোনো continuous $f : K \to \mathbb{R}$ নিলেই দেখবে এমন $a, b \in K$ আছে, যাতে $f(a)$ হল $f(x)$-এর maximum value, এবং $f(b)$ হল minimum value. একটা উদাহরণ দেখিয়েছি Fig 4-এ। এই ধর্মটা অংকের বাইরেও বিজ্ঞানের বহু শাখায় কাজে লাগে। কীভাবে শোনো। অনেক জায়গাতেই আমাদের কাছে কোনো একটা function দেওয়া থাকে f, এবং আমাদেরকে খুঁজে বেড়াতে হয় কোন্ x-এর জন্য $f(x)$-টা maximum বা minimum হয়। হন্যে

Fig 3

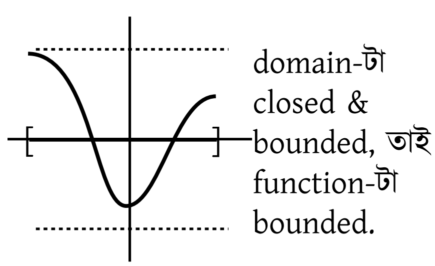
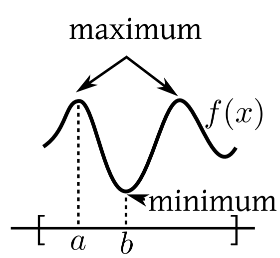


Fig 4



হয়ে এরকম x খুঁজে বেড়ানোর আগে একটা গ্যারান্টী থাকা ভালো যে, এরকম x সত্যিই আছে। আফ্রিকার জঙ্গলে বাঘ শিকার করার জন্য তুমি যতই বন্দুক মেশিনগান নিয়ে রওনা হও না কেন, পুরোটাই পণ্ডশ্রম হবে, কারণ আফ্রিকার জঙ্গলে মোটেই বাঘ পাওয়া যায় না। সেইরকম, f-এর যদি maximum বা minimum নাই থাকত, তবে তাকে খোঁজার জন্য নানারকম কাণ্ডকারখানা করার মানেই হত না।

লক্ষ্মণ:- আর আমি যদি শক্তিশেল খেয়ে না পড়তাম তো এত সব কাণ্ডকারখানা কিছুই হত না--আর তোমরাও বিদ্যে জাহির করতে পারতে না।

--লক্ষ্মণের শক্তিশেল

এইরকম গ্যারান্টী আসে যদি f-টা continuous এবং তার domain-টা closed and bounded হয়।

- যদি কোনো $f : K \to \mathbb{R}$ দেওয়া থাকে, যেটা continuous (এবং $K \subseteq \mathbb{R}$-টা closed and bounded), তবে সেটা uniformly continuous-ও হতে বাধ্য। আমরা জানি uniform continuity হল সাধারণ continuity-র চেয়ে বেশী জোরালো। সুতরাং domain-টা closed আর bounded হলে সাধারণ continuity-ই দিব্যি জোরালো হয়ে উঠছে!

এসবই হল real analysis-এর স্মৃতিচারণ। Real analysis শেখার সময়ে আমরা $\mathbb{R}$-এর উপরে Euclidean metric নিয়ে কাজ করি। কিন্তু যদি অন্য কোনো metric space নিয়ে কাজ করতে হয়, তবে মুশকিল হল closed and bounded সেটদের এই ভালো ভালো ধর্মগুলো নাও থাকতে পারে। এরকম কয়েকটা উদাহরণ এবার আলোচনা করব।

26.2 অন্যান্য metric space-এ সমস্যা

এবার আমরা বিভিন্ন metric space-এর মধ্যে কিছু set-এর উদাহরণ দেখব, যারা closed and bounded, কিন্তু সেই ভালো ভালো ধর্মগুলো যেখানে সব খাটে না। একটা ধর্ম ছিল এই যে closed and bounded set-দের উপরে continuous function-দের maximum আর minimum থাকে। প্রথম উদাহরণে সেইটাকে ধূলিসাৎ করব।

Example 2: এখানে আমরা metric space-এর set-টা নেব $X = (0, 1)$, আর metric-টা নেব Euclidean metric.

দেখাও যে, এই metric space-এ $A = (0, 1)$ হল closed and bounded. আরো দেখাও যে $f : A \to \mathbb{R}$ যদি $f(x) = x$ হয়, তবে f-টা continuous, কিন্তু এর কোনো maximum বা minimum নেই।
SOLUTION: এখানে আসলে $A = X$. তাই A অবশ্যই X-এর মধ্যে একটা closed set, কারণ যেকোনো metric space-ই নিজের মধ্যে closed (এবং open-ও বটে)।
Bounded দেখানোর জন্য দেখাতে হবে set-টা কোনো একটা $N_X(a, r)$-এর ভিতরে আছে, যেখানে a হল metric space-টার কোনো বিন্দু আর $r > 0$. তা, আমরা যদি $a = \frac{1}{2}$ আর $r = \frac{1}{2}$ নিই, তাহলেই $(0, 1) = N_X(a, r)$ হয়ে যাবে। যেহেতু আমরা আমাদের পরিচিত Euclidean metric নিয়েই কাজ করছি, তাই $f(x) = x$ অবশ্যই continuous হবে। চাইলে অংকের ভাষায় লিখে প্রমাণ করে দিচ্ছি, যাতে কোনো সন্দেহের অবকাশ না থাকে--

To show

$$\forall a \in (0, 1) \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in N_X(a, \delta) \quad f(x) \in N_{\mathbb{R}}(f(a), \epsilon).$$

$\forall a, \epsilon$ Take any $a \in (0, 1)$ and any $\epsilon > 0$.

এবার δ নির্বাচনের পালা। Fig 5 দেখেই বুঝতে পারছ যে $\delta = \epsilon$ নিলেই হবে।

$\exists \delta$ Choose $\delta = \epsilon > 0$.

$\forall x$ Take any $x \in N_X(a, \delta)$.

Then $f(x) = x \in N_X(a, \delta) \subseteq N_{\mathbb{R}}(f(a), \epsilon)$, as required.

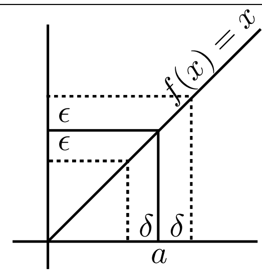


Fig 5

সুতরাং continuity দেখানো হয়ে গেল। এবার লক্ষ করো যে, $(0, 1)$-এর মধ্যে প্রান্তদুটো নেই। তাই $f(x)$-এর কোনো minimum বা maximum-ও নেই, কারণ তুমি যতই x-কে 0-র আরো আরো কাছে নেবে, ততই $f(x)$ কমতে থাকবে। একইভাবে x-কে 1-এর কাছে নিলে $f(x)$ বাড়তে থাকবে। ■

এই অংকটায় $f(x)$-টা অন্ততঃ bounded ছিল। এবার একটা উদাহরণ দেখব, যেখানে একটা continuous function-এর domain হল closed and bounded, অথচ function-টা unbounded!

Example 3: এই metric space-টা নাও, $(\mathbb{N}, d_1)$, যেখানে d_1 হল discrete metric. দেখাও যে $\mathbb{N}$ হল এই metric space-এর মধ্যে closed and bounded. এবার ধরো $f : (\mathbb{N}, d_1) \to (\mathbb{R}, d)$ দিলাম এইরকম, $f(n) = n^2$. দেখাও যে, f-টা continuous. কিন্তু f-টা মোটেই একটা bounded function নয়।

SOLUTION: যেকোনো metric space-ই তার নিজের মধ্যে closed. তাই $\mathbb{N}$ এখানে closed। আবার আমাদের metric-টাই এমন যে, সেটা কখনওই 1-এর চেয়ে বড় হতেই পারে না। তাই পুরো $\mathbb{N}$-কে এই metric অনুসারে একটা ball-এর মধ্যে পুরে ফেলা যায়, খালি ball-টার radius যেন > 1 হয়, centre যা খুশি হতে পারে। যেমন $\mathbb{N} = N_{\mathbb{N}}(0, 2)$. সুতরাং bounded-ও হল।

আমরা গত অধ্যায়েই শিখেছি যে, domain-এর উপর discrete metric দিলে যেকোনো function-ই continuous হয়। অতএব আমাদের f-টাও continuous হতে বাধ্য। কিন্তু $f(n) = n^2$, তাই n যতই বড় হচ্ছে, $f(n)$ ততই ∞-র দিকে ছুটছে, তাই f আর bounded হয় কী করে? ■

Real analysis-এ আমরা closed and bounded set-দের যে কটা ভালো ধর্ম দেখেছিলাম, তার একটা ছিল Bolzanno-Weierstrass property. এবার আমরা দেখব এমন metric space সম্ভব, যেখানে একটা closed, bounded set রয়েছে, অথচ তার মধ্যে একটা infinite subset-এর কোনো limit point নেই! Bolzanno-Weierstrass-এর অপমৃত্যুর এই করুণ নিদর্শন রয়েছে নীচের উদাহরণে।

Example 4: $X = (0, 1]$ নিলাম, আর metric-টা নিলাম Euclidean. এই metric space-এর একটা subset হল $A = \left\{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$. দেখাও যে, A হল X-এর মধ্যে closed আর bounded? এবার A-র মধ্যে একটা infinite subset দিচ্ছি A নিজেই। দেখাও যে, Bolzanno-Weierstrass theorem-এর সিদ্ধান্তটা এর জন্য খাটে না।

SOLUTION: A যে bounded সে তো বোঝাই যাচ্ছে, কারণ X নিজেই তো bounded. আর A-টা closed-ও বটে, কারণ যদি তুমি পুরো $\mathbb{R}$-কে metric space হিসেবে নিতে, তবে A-র একটাই limit point হত, 0. কিন্তু 0 তো X-এর বাইরে। তার মানে X-এর মধ্যে A-র এমন কোনো limit point নেই, যেটা A-র বাইরে। অতএব A হল X-এর মধ্যে closed.

এদিকে Bolzanno-Weierstrass theorem-এর সিদ্ধান্তটা হল এই যে, A-র অন্ততঃ একটা limit point থাকবেই A-র মধ্যে। কিন্তু আমরা এক্ষুণি দেখলাম যে A-র কোনো limit point নেই পুরো X-এর মধ্যেই! সুতরাং Bolzanno-Weierstrass theorem-এর সিদ্ধান্ত এখানে খাটল না! ■

এরকম কিছু অংক এবার তোমার নিজে নিজে করার জন্য দিই।

Exercise 2: $([0,1)$, Euclidean$)$-এর মধ্যে এমন একটা infinite subset দিতে পারো, যার কোনো limit point নেই $[0,1)$-এর ভিতরে? ■

Exercise 3: $X = (0,\infty)$-র উপরে Euclidean metric নাও। এর ফলে যে metric space-টা পেলে তার মধ্যে একটা $A \subseteq X$ এবং $f : A \to \mathbb{R}$-এর উদাহরণ দাও, যাতে A-টা হয় X-এর মধ্যে closed and bounded, এবং f-টা হয় continuous অথচ unbounded. ■

এই সব অংক থেকেই বুঝতে পারছ, যেকোনো metric space-এর বেলাতেই যে closed and bounded মানে ওই সব ভালো ভালো ধর্মগুলো থাকবে, এমন কোনো গ্যারান্টী নেই। অথচ ওই ভালো ভালো ধর্মগুলো ছাড়তেও ইচ্ছে করে না। তাই গণিতজ্ঞরা এমন একটা শর্ত খুঁজতে লাগলেন, যেটা মানলেই যেকোনো metric space-এই সেই ভালো ভালো ধর্মগুলো পালিত হয়। এরকম শর্ত খুঁজে পাওয়া মোটেই সহজ ছিল না। যাই হোক, এরকম শর্ত পাওয়া গেছে, যদিও জিনিসটা খানিকটা বিদঘুটে গোছের। শর্তটাকে বলে **compactness.** কাল থেকে আমরা সেটাই আলোচনা করব।

DAY 27
Compact-এর গোড়ার কথা (part 2)

27.1 Compactness-এর সংজ্ঞা

সংজ্ঞাটা সামান্য জটিল। তাই গোড়ায় একটু প্রস্তুতি লাগবে। প্রথমেই আমাদের শিখতে হবে একটা নতুন ধারণা, যার নাম **cover.** আমরা সকলেই জানি ইংরাজীতে cover মানে হল ঢাকনা। অংকের জগতেও ব্যাপারটা ঠিক তাই। একটা উদাহরণ নিয়ে শুরু করি।

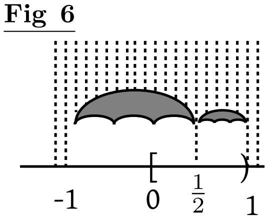
Example 5: তোমাকে একটা set দিচ্ছি $[0,1) \subseteq \mathbb{R}$. তোমাকে বলতে হবে $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ আর $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ মিলে ওকে cover করে কিনা।

SOLUTION: এই দুটো set-কে যদি ছাতার মত ভাবো (Fig 6), তবে দেখবে যে বৃষ্টি পড়লে ছাতায় সবটা আটকাবে না, $\frac{1}{2}$ বিন্দুটায় বৃষ্টি পড়বেই। তাই এরা দুজন মিলে $[0,1)$-এর একটা cover হল না। ■

Example 6: যদি আগের উদাহরণে আমরা $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ আর $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$ নিতাম তবে কী cover হত? যদি তিনটে set নিতাম, $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ আর $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$, তবে?

SOLUTION:দুইক্ষেত্রেই cover হত। ■

Fig 6



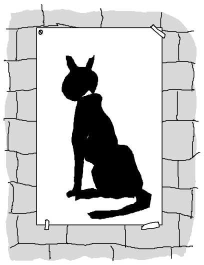


Fig 7

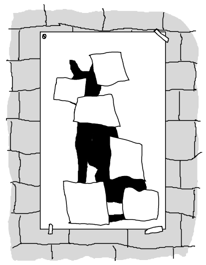


Fig 8

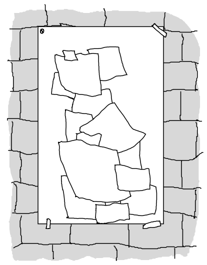


Fig 9

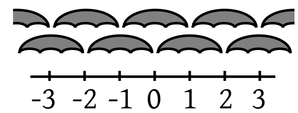


Fig 10

একইরকম ব্যাপার করা যায় অন্যান্য metric space-এও। যেমন ধরো $\mathbb{R}^2$-তে। Fig 7-এ দ্যাখো দেওয়ালের গায় একটা বেড়াল আঁকা রয়েছে। ধরো দেওয়ালটাকে বললাম $\mathbb{R}^2$, তাহলে ছবিটা হল তার একটা subset A. এবার Fig 8 দ্যাখো--কারা যেন ছবিটার উপরে কয়েকটা পোষ্টার সেঁটে দিয়ে গেছে, ফলে ছবিটার খানিকটা ঢাকা পড়ে গেছে। Fig 9-এ এত পোষ্টার পড়েছে যে বেড়ালটা পুরোই ঢেকে গেছে। পোষ্টারগুলোকেও $\mathbb{R}^2$-এর এককেটা subset বলে ভাবতে পারি, ধরো $A_1, A_2, ...$। সুতরাং সবগুলো পোষ্টার মিলে বেড়ালটাকে ঢেকে ফেলা মানে হল

$$A \subseteq \bigcup_n A_n.$$

এক্ষেত্রে আমরা বলি যে $\{A_1, A_2, ...\}$ হল A-র একটা cover. লক্ষ কর একটা cover সব সময়েই একটা collection of sets. তার মধ্যে খালি একটা set-ও থাকতে পারে, খালি দুটো set-ও থাকতে পারে, বা যেকোনো finite-সংখ্যক, এমন কি infinite-সংখ্যক set-ও থাকতে পারে। অংকের ভাষায় এরকম যেকোনো collection-কে বোঝানোর জন্য একটা কায়দা আছে। আমরা লিখি $\{A_\alpha \ : \ \alpha \in I\}$. এখানে A_α-গুলো হল আমাদের collection-এর সদস্য set-গুলো। আর I হচ্ছে যাকে বলে একটা **index set.** যেমন যদি collection-টায় খালি তিনটে set থাকে, A_1, A_2 আর A_3, তবে আমরা $I = \{1, 2, 3\}$ নিলেই collection-টাকে $\{A_\alpha \ : \ \alpha \in I\}$ লেখা যাবে। যদি তুমি $\mathbb{R}$-কে ঢেকে ফেলার জন্য প্রতিটা integer-এর একটা ছাতা বসাও $N(n, 1)$, তবে যে collection-টা পাবে সেটা হল $\{A_\alpha \ : \ \alpha \in I\}$ যেখানে $I = \mathbb{Z}$ আর $A_\alpha = N(\alpha, 1)$. ছবিতে দেখিয়েছি Fig 10-এ। চাইলে তুমি প্রতিটা real সংখ্যাতেই একটা করে ছাতা বসাতে পারতে, (সেটা অবশ্য ছবিতে এঁকে দেখানো সম্ভব নয়!), তবে $I = \mathbb{R}$ নিতাম।
এবার চট্ করে cover-এর সংজ্ঞাটা[1] লিখে ফেলি।

> DEFINITION: **Cover**
>
> Let (X, d) be a metric space. Let $A \subseteq X$ be any set. By a **cover** of A in X we mean a collection $\{A_\alpha \ : \ \alpha \in I\}$ of subsets of X such that $A \subseteq \cup_{\alpha \in I} A_\alpha$.
> By a cover of a metric space (X, d) we mean a cover of X in itself.

নানারকমের cover নিয়ে আমাদের কাজ করতে হয়। কিন্তু তার মধ্যে সবচেয়ে বেশী ব্যবহার হয় একটা বিশেষ ধরণের cover, যেটা এবার আলোচনা করব। ধরো তোমাকে $(0, 1)$-কে cover করতে হবে। তার জন্য আমরা $(0, 1)$-এর প্রতিটা বিন্দু x-এই একটা করে ছাতা বসাব, ধরো $N(x, 0.1)$. তাহলে যে cover-টা পাবে সেটা হল $\{N(x, 0.1) \ : \ x \in (0, 1)\}$. লক্ষ করো এই ধরণের cover-এ যে set-টাকে cover করতে হয়, সেটাকেই index set নেওয়া হয়। এখানে আমরা প্রতিটা ছাতার সাইজ সমান নিয়েছিলাম, তার কোনো দরকার নেই, চাইলে $x \in (0, 1)$-এ যে ছাতা বসাচ্ছ তার সাইজ x-এর উপর নির্ভর করতে পারে, তাতেও একটা cover পাবে, অর্থাৎ যদি (X, d) একটা metric space হয়, তার একটা cover বানানো যায় এইভাবে--

[1]আমরা এখানে metric space-এর প্রসঙ্গে cover-এর সংজ্ঞা লিখছি। Combinatorics-এও cover-এর ধারণা কাজে লাগে। সেখানে আরো দুটো বাড়তি শর্ত চাপানো হয়, A_α-রা সবাই nonempty, এবং $\alpha \neq \beta$ হলে $A_\alpha \neq A_\beta$. এ দুটো শর্ত এই বইতে লাগবে না।

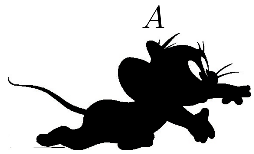


Fig 11

প্রতিটা $x \in X$-এর জন্য একটা করে $\epsilon_x > 0$ নাও তবে $\{N(x, \epsilon_x) \ : \ x \in X\}$ হবে X-এর একটা cover.

Cover-এর ধারণার সঙ্গে জড়িত আরো কয়েকটা জিনিস শিখব এবার। একটা cover হল একগুচ্ছ set-এর collection. সেই collection-এ মোট set-এর সংখ্যাটা finite নাকি infinite সেই অনুযায়ী আমরা cover-টাকে একটা finite cover বা একটা infinite cover বলব।

DEFINITION: Finite/infinite cover

A cover consisting of only finitely many sets is called a **finite cover**. Otherwise, it is called an **infinite cover**.

যদি একটা cover-এর সবগুলো set-ই open হয়, তবে cover-টাকে বলে একটা open cover.

DEFINITION: Open cover

Let (X, d) be a metric space. Let $A \subseteq X$ be any set. By an **open cover** of A in X we mean a cover $\{A_\alpha \ : \ \alpha \in I\}$ of A such that each A_α is open in X.
By an open cover of a metric space (X, d) we mean an open cover of X in itself.

অনেক সময়ে দেখা যায় যে একটা cover-এ যতগুলো set আছে, তাদের কয়েকটাকে বাদ দিলেও সেটা cover-ই থাকে। যেমন Fig 11-এ দেখানো A-কে cover করেছি ধাপে ধাপে Fig 12 থেকে শুরু করে Fig 15 পর্যন্ত। এখানে $\{A_1, ..., A_4\}$ হল একটা cover. লক্ষ কর যে A_1 আর A_2-কে বাদ দিলেও খালি A_3 আর A_4 দিয়েই A সম্পূর্ণই ঢাকা পড়ত। এরকম ক্ষেত্রে $\{A_3, A_4\}$-কে বলব $\{A_1, ..., A_4\}$-এর একটা subcover.

Fig 12

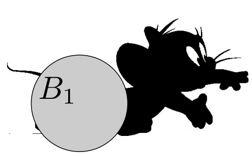


Fig 13

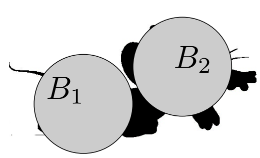


Fig 14

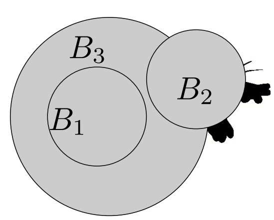
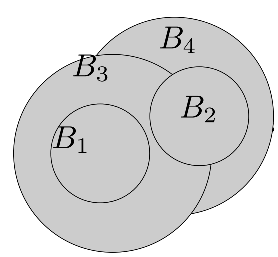


Fig 15



DEFINITION: Subcover

Let $\{A_\alpha \ : \ \alpha \in I\}$ be cover for some set A. If $J \subseteq I$ is such that $\{A_\alpha \ : \ \alpha \in J\}$ is also a cover of A, then we call $\{A_\alpha \ : \ \alpha \in J\}$ a **subcover** of $\{A_\alpha \ : \ \alpha \in I\}$.

এইবার অবশেষে compact set-এর সংজ্ঞায় আসি--A-কে আমরা একটা compact set বলব যদি ওর যেকোনো open cover-এরই একটা finite subcover থাকে। খুবই অদ্ভুত সংজ্ঞা সন্দেহ নেই। এটা নিয়ে কাজ করার আগে জিনিসটা গুছিয়ে লিখে নিই।

DEFINITION: Compact

Let (X, d) be a metric space. Then $A \subseteq X$ is called a **compact** set in X if for every open cover of A in X there is a finite subcover of A.
(X, d) is called a **compact metric space** if X is a compact set in itself.

কয়েকটা উদাহরণ দেখে সংজ্ঞাটা হজম করা যাক।

Example 7: ধরো আমাদের metric space হল ($\mathbb{R}$, Euclidean)। এর মধ্যে $[0, 1]$ নিলাম। এর একটা open cover নিচ্ছি এইরকম--

$$\{N(x, 0.1) \ : \ x \in [0, 1]\}.$$

এর একটা finite subcover দিতে পারো?
SOLUTION: যেহেতু প্রতিটা ছাতার diameter-ই $2 \times 0.1 = 0.2$, তাই ওর চেয়ে কম কোনো দূরত্বে কয়েকটা ছাতা রাখলেই হবে, যাতে ছাতাগুলোর মধ্যে খানিকটা করে overlap থাকে। ধরো আমরা 0.1 দূরত্ব অন্তর অন্তর ছাতাগুলো রাখছি (Fig 16)--

$$\{ \ N(0, 0.1), \ N(0.1, 0.1), \ ..., \ N(0.9, 0.1), \ N(1, 0.1) \ \}.$$

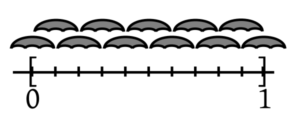
এইটাই একটা finite subcover হবে। ■

Example 8: আগের উদাহরণে $[0, 1]$-এর জায়গায় যদি $(0, 1)$ নিই, তবে তার একটা open cover হবে

$$\{N(x, 0.1) \ : \ x \in (0, 1)\}.$$

এর কোনো finite subcover দিতে পারো?

Fig 16



SOLUTION: আগের অংকের সমাধানের পথে এগোলেই হবে। তবে এখানে যেহেতু $0, 1 \notin (0, 1)$, তাই প্রান্তের ছাতা দুটো একটু ভিতর দিকে সরিয়ে আনতে হবে। যেমন ধরো, সবচেয়ে বাঁদিকে ছাতাটাকে 0-র জায়গায় 0.05-এ বসালাম, আর সবচেয়ে ডানদিকেরটাকে 1-এর বদলে 0.95-এ বসালাম, অর্থাৎ--

$$\{\ N(0.05, 0.1),\ \ N(0.1, 0.1),\ \ ...,\ \ N(0.9, 0.1),\ \ N(0.95, 0.1)\ \}.$$

■

Exercise 4: আচ্ছা, আগের অংক দুটোয় আমরা $[0, 1]$ আর $(0, 1)$-এর একটা করে open cover নিয়ে তার finite subcover বার করে দিতে পারলাম। এ থেকেই কি জোর দিয়ে বলা যায় যে, $[0, 1]$ আর $(0, 1)$ দুজনেই compact? ■

Example 9: $(0, 1)$-এর আরেকটা open cover দিচ্ছি--

$$\left\{N\left(0, 1 - \tfrac{1}{n}\right) \ : \ n = 2, 3, ...\right\}.$$

প্রথমে পরীক্ষা করে দ্যাখো যে এটা সত্যিই একটা cover হচ্ছে। তারপর এর একটা finite subcover বার করার চেষ্টা করো।

SOLUTION: এখানে সবগুলো ছাতাই 0-তে বসানো, খালি সাইজে ক্রমশঃ বাড়ছে। বাড়তে বাড়তে radius-টা 1-এর দিকে এগোচ্ছে, কিন্তু কখনোই 1 হয়ে যাচ্ছে না। অতএব তুমি যাই $x \in (0, 1)$ নাও না কেন, এমন একটা $n \in \{2, 3, ...\}$ পাবে, যাতে $1 - \frac{1}{n} > x$ হবে। তাই $x \in N\left(0, 1 - \frac{1}{n}\right)$ হয়ে যাবে। সুতরাং cover হচ্ছে।

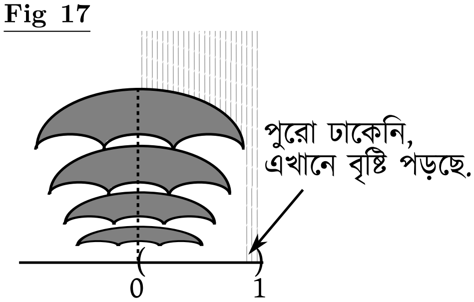
এবার দেখি কোনো finite subcover পাওয়া যায় কিনা। মনে রেখো ছাতাগুলোর সাইজ কোনো সময়েই 1 হচ্ছে না, তাই যেই তুমি কোনো finite-সংখ্যক ছাতা নেবে, অমনি $(0, 1)$-এর ডান প্রান্তের খানিকটা ছাতার বাইরে থেকে যাবে। অতএব cover হবে না। Fig 17 দ্যাখো। অংকের ভাষায় লিখলে এরকম হবে--

> Let, if possible,
> $$\left\{N\left(0, 1 - \tfrac{1}{n_1}\right), ..., N\left(0, 1 - \tfrac{1}{n_k}\right)\right\} \qquad (*)$$
> be a finite subcover, where $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$.

যেহেতু ছাতাগুলো ক্রমশঃ বড় হচ্ছে, তাই union নিলে সবচেয়ে বড় ছাতাটাই হবে--

> Then
> $$\cup_{i=1}^{k} N\left(0, 1 - \tfrac{1}{n_i}\right) = N\left(0, 1 - \tfrac{1}{n_k}\right) \neq (0, 1),$$

Fig 17



Since $1-\frac{1}{n_k}<1(\Rightarrow\Leftarrow)$.

Exercise 5: আগের অংকটা থেকে কি জোর দিয়ে বলা যায় যে $(0,1)$ মোটেই compact হতে পারে না? ■

■

Exercise 6: $(0,1)$-এর দুটো প্রান্ত বলা যায় 0 আর 1 (যদিও ওরা $(0,1)$-এর মধ্যে নেই)। কোনো $x\in(0,1)$ দিলে আমরা $(0,1)$-এর মধ্যে x-এর গভীরতা মাপতে পারি এইভাবে--

$$\delta_x=\min\{x,1-x\}>0,$$

অর্থাৎ x-টা নিকটতম প্রান্ত থেকে কতটা দূরে। লক্ষ করো $\left\{N\left(x,\frac{\delta_x}{2}\right)\ :\ x\in(0,1)\right\}$ হল $(0,1)$-র একটা open cover. এর একটা finite subcover বার করতে পারবে?
HINT: লক্ষ করো, $N\left(x,\frac{\delta_x}{2}\right)$-রা কেউই প্রান্ত অব্ধি পৌঁছচ্ছে না। ■

এবার একটা বোকাবোকা ঠকানো প্রশ্ন।

Exercise 7: ($\mathbb{R}$, Euclidean)-এর মধ্যে এই set-টা নাও $\{1,2,3\}$. এর জন্য একটা open cover দিচ্ছি এইরকম--

$$\{(0,2),(1,3),(2,4)\}.$$

এর কি কোনো finite subcover আছে? ■

এই অংকটা করতে পারলেই বুঝতে পারবে যে, যেকোনো finite set-ই compact হতে বাধ্য। সেটা একটা theorem হিসেবে লিখে রাখি।

THEOREM
Any finite subset of a metric space is compact.

Proof:

Let $A=\{x_1,...,x_n\}$ be a finite subset of a metric space.
Let $\{A_\alpha\ :\ \alpha\in I\}$ be any open cover of A.
Then $\forall i\in\{1,...,n\}\quad\exists\alpha_i\in I\quad x_i\in A_{\alpha_i}$.
Then $\{A_{\alpha_1},...,A_{\alpha_n}\}$ is a finite subcover.
Since $\{A_\alpha\ :\ \alpha\in I\}$ was an arbitrary open cover of A, hence A must be compact, as required.

[Q.E.D]

27.2 Relative নাকি absolute?

এবার আমরা একটা জিনিস আলোচনা করব, যেটা সামান্য সূক্ষ্ম। আমরা বলতে চলেছি যে--

> "একটা metric space-এ একটা set-এর open বা closed হওয়াটা হল একটা relative ব্যাপার, কিন্তু compact হওয়াটা একটা absolute ব্যাপার।"

একটা উদাহরণ দিয়ে গুছিয়ে বলি।

Example 10: ($\mathbb{R}$, Euclidean) নিলাম। তার মধ্যে $[0,2]$ এবং তারও মধ্যে $[0,1)$ নিলাম। সুতরাং আমরা চাইলে

$[0,1)$-কে ($\mathbb{R}$, Euclidean)-এর মধ্যে একটা set বলেও ভাবতে পারি, আবার (($[0,2]$, Euclidean)-এর মধ্যে একটা set বলেও ভাবতে পারি। আমি জানতে চাই, $[0,1)$-টা open কিনা। উত্তরটা দুভাবে দাও, একবার $\mathbb{R}$-এর মধ্যে আছে ধরে, আরেকবার $[0,2]$-এর মধ্যে আছে ধরে।

SOLUTION: যখন $\mathbb{R}$-এর মধ্যে কাজ করছ, তখন $[0,1)$ মোটেই open নয়, কারণ $0 \in [0,1)$-কে ঘিরে $\mathbb{R}$-এর মধ্যে কোনো neighbourhood পাবে না যেটা সম্পূর্ণভাবে $[0,1)$-এর মধ্যে আছে। কারণ যাই $\delta > 0$ নেবে $N_{\mathbb{R}}(0,\delta)$-এর খানিকটা অংশ 0-র বাঁদিকে থাকবে, এবং সেটা $[0,1)$-এর বাইরে গিয়ে পড়বে। কিন্তু $[0,2]$-এর মধ্যে কাজ করার সময়ে সে সমস্যা নেই, যেহেতু $[0,2]$-র মধ্যে 0-র δ neighbourhood হল $N_{[0,2]}(0,\delta) = N(0,\delta) \cap [0,2]$, যার কোনো অংশই 0-র বাঁদিকে নেই। এখানে আমাদের দৃষ্টি সম্পূর্ণভাবেই $[0,2]$-তেই নিবদ্ধ, 0-র বাঁদিক আর 2-এর ডানদিক তাই আমাদের চোখে স্রেফ মহাশূন্য! সেই কারণে আমরা বলব যে, $[0,1)$ হল open in $[0,2]$. ■

এই অংকটা থেকেই বুঝবে কেন open হওয়াকে relative বলেছিলাম। দুই ক্ষেত্রেই আমরা একই set আর একই metric নিয়ে কাজ করলাম, $[0,1)$ এবং Euclidean. কিন্তু তাও উত্তরটা বদলে গেল কোন্ প্রেক্ষাপটে কাজ করছি তার ভিত্তিতে। কিন্তু compact-এর বেলায় এমনটা হতে পারে না, যেই তোমাকে একটা set আর একটা metric দিয়ে দেব, অমনি তুমি বলে দিতে পারবে সেটা compact কিনা। প্রেক্ষাপট যতই বদলাও উত্তরটা বদলাবে না। এই গ্যারান্টীটা আসে নীচের theorem-টা থেকে।

> THEOREM
>
> Let (X,d) be a metric space. Let $K \subseteq X$ be any subset. Then K is a compact set in (X,d) if and only if (K,d) is a compact metric space.

Proof: প্রথমে বুঝে নাও এই theorem-টা থেকে compactness-এর absolute হওয়ার ব্যাপারটা কী করে আসছে। "K is compact in (X,d)" এই বাক্যটার মধ্যে (X,d)-র উল্লেখ আছে প্রেক্ষাপট হিসেবে। কিন্তু "(K,d) is a compact metric space" বাক্যটার মধ্যে কোনো প্রেক্ষাপটের উল্লেখ নেই। এই theorem টা বলছে যে এই দুটো বাক্যই আসলে সমার্থক, তার মানে compactness-এর জন্য প্রেক্ষাপটের কোনো মূল্য নেই।
এবার তবে প্রমাণে হাত দেওয়া যাক। এটা একটা if and only if-জাতীয় theorem, তাই প্রমাণটা দুইভাগে ভেঙে হবে--

> (If part): Let (K,d) be a compact metric space. Shall show that K is a compact set in (X,d).

আমাদের কাজ হল K-র যেকোনো open cover-এর জন্য একটা subcover বার করে দেখানো।

> Take any open cover $\{A_\alpha \ : \ \alpha \in I\}$ of K in (X,d).
>
> Then $\{A_\alpha \cap K \ : \ \alpha \in I\}$ is an open cover of (K,d).

এইটা কেন হল, বুঝলে তো? K-র মধ্যে open set-গুলো পাওয়া যায় X-এর open set-গুলোর সঙ্গে K-র intersection নিয়ে। যেহেতু A_α-রা সবাই open in X, তাই $A_\alpha \cap K$-রা সবাই open in K (সাবধান, ওরা কিন্তু open in X নাও হতে পারে!)। এদিকে A_α-রা সবাই মিলে K-কে ঢেকে দিয়েছিল, সুতরাং K-র সঙ্গে intersection নিলেও K-টা ঢাকাই থাকবে।
এবার একটা finite subcover বার করব।

> Since (K,d) is a compact metric space, hence there is a finite subcover
>
> $$\{A_{\alpha_1}\cap K, ..., A_{\alpha_n}\cap K\}.$$
>
> Since $K\subseteq \cup_1^n\big(A_{\alpha_i}\cap K\big) = (\cup_1^n A_{\alpha_i})\cap K$, hence $K\subseteq \cup_1^n A_{\alpha_i}$.
> Thus we have obtained a finite subcover of any open cover $\{A_\alpha \ : \ \alpha\in I\}$.
> So K is a compact subset of (X,d), as required.

এবার অন্য দিকটা।

> (Only if part): Let K be a compact set in (X,d). Shall show that (K,d) is a compact metric space.
> Take any open cover $\{B_\alpha \ : \ \alpha\in I\}$ of (K,d).
> Since each B_α is open in K, hence $B_\alpha = A_\alpha\cap K$ for some open A_α in X.
> Thus $\{A_\alpha \ : \ \alpha\in I\}$ is an open cover of K in (X,d).
> Since K is compact in (X,d), hence there is a finite subcover
>
> $$\{A_{\alpha_1}, ..., A_{\alpha_n}\}.$$
>
> Since $K\subseteq \cup_1^n A_{\alpha_i}$, hence $K\subseteq (\cup_1^n A_{\alpha_i})\cap K = \cup_1^n\big(A_{\alpha_i}\cap K\big) = \cup_1^n B_{\alpha_i}$.
> Thus, $\{B_{\alpha_1}, ..., B_{\alpha_n}\}$ is a finite subcover.
> Hence (K,d) is a compact metric space, as required.

[Q.E.D]

DAY 28
Real analysis-এর সঙ্গে সামঞ্জস্য

আমরা এই অধ্যায়ের শুরুতেই ($\mathbb{R}$, Euclidean)-এর মধ্যে closed and bounded set-দের নানারকম ভালো ভালো গুণের কথা বলেছিলাম, এবং আরও বলেছিলাম যে, অন্যান্য metric space-এ closed and bounded set-দের সেইসব গুণ নাও থাকতে পারে। সেই প্রসঙ্গেই এসেছিল compact-এর বিদ্ঘুটে সংজ্ঞাটা। আমরা দাবী করেছিলাম যে, কোনো set যদি compact হয়, তবে real analysis-এ closed and bounded set-দের যে ধর্মগুলো বলেছিলাম, সেগুলো সেই set-এরও থাকবে। এ যাবৎ খালি দাবীটুকুই করেছি। আজকে প্রমাণ করব। প্রথমে দেখাব যে, যদি ($\mathbb{R}$, Euclidean) নিয়ে কাজ করো, তবে বিদ্ঘুটে সংজ্ঞাটা আর closed and bounded হওয়া সমার্থক।
আমরা যা করতে চলেছি, তার দুটো অংশ--

- প্রথম অংশ হল, যদি ($\mathbb{R}$, Euclidean)-এর মধ্যে কোনো set আমাদের বিদ্ঘুটে সংজ্ঞাটা পালন করে compact হয়, তবে সেটা closed and bounded হতে বাধ্য।
- দ্বিতীয় অংশ হল, যদি ($\mathbb{R}$, Euclidean)-এর মধ্যে কোনো closed and bounded set নাও, তবে সেটা ওই বিদ্ঘুটে সংজ্ঞা পালন করে compact হবে।

এই দুটোই আমরা একে কে প্রমাণ করব। এর মধ্যে প্রথম অংশটা সর্বত্রই খাটে, মানে যেকোনো metric space-এই।

28.1 Compact $\implies$ closed and bounded (সর্বত্র)

কী প্রমাণ করতে চলেছি, সেটা লিখে নিয়েছি নীচের theorem-এ। এখানে $\mathbb{R}$-এর কোনো উল্লেখ নেই, কারণ ব্যাপারটা যেকোনো metric space-এই খাটে।

THEOREM

Let (X, d) be a metric space, and let $A \subseteq X$ be compact. Then A must be closed and bounded in X.

Proof: প্রমাণটার দুটো অংশ হবে বুঝতেই পারছ, একটা অংশে দেখাব bounded আর অন্য অংশে closed. প্রথমে bounded দেখানো দিয়ে শুরু করি।

Step 1: Shall show that A is bounded, ie,

$$\exists x_0 \in X \quad \exists r > 0 \quad A \subseteq N(x_0, r).$$

প্রথম কাজ একটা উপযুক্ত $x_0 \in X$ নেওয়া। সেটা আসলে খুবই সহজ, যা খুশি $x_0 \in X$ নিলেই চলবে--

$\forall x_0$ Take any $x_0 \in X$ (possible $\because X \neq \phi$).

এবার বার করব একটা উপযুক্ত $r > 0$.
A-র উপরে খালি একটাই শর্ত দেওয়া আছে, compact, অর্থাৎ A-র যেকোনো open cover-এরই একটা finite subcover আছে। সুতরাং A-র যেকোনো ধর্ম প্রমাণ করার জন্যই আমাদের কোনো একটা জুৎসই open cover নিয়ে তার একটা finite subcover বার করতে হবে।
আমাদের দরকার মত $r > 0$ বার করার জন্য জুৎসই open cover-টা নেব এইভাবে--

We know that $\cup_{r>0} N(x_0, r) = X$.

এইটা আসলে খুবই সহজ জিনিস। আমরা যেহেতু যাবতীয় $r > 0$ সাইজের ছাতাই নিয়েছি, সুতরাং ওদের তলায় পুরো X-ই চাপা পড়ে যাবে।

So $\{N(x_0, r) \ : \ r > 0\}$ is an open cover of X, and so also of A.
Since A is compact, hence there is a finite subcover

$$\{N(x_0, r_1), ..., N(x_0, r_n)\}.$$

$\exists r$ Choose $r = \max\{r_1, ..., r_n\} > 0$.

Then $A \subseteq N(x_0, r)$, as required.

এবার closed দেখানোর পালা।

Step 2: Shall show that A is closed.

আমরা contradiction-এর পথে এগোব। তার জন্য প্রথমে ভেবে নিই, closed না হলে কী হত। এরকম একটা উদাহরণ আমরা দেখেছিলাম Example 9-এ[2]। সেখানে কাজ করছিলাম $(0,1)$ নিয়ে, এবং তার এই open cover-টা নিয়েছিলাম $\left\{ \left(N(0, 1-\frac{1}{n} \right) \;:\; n \geq 2 \right\}$. এর কোনো finite subcover পাওয়া যায়নি, কারণ cover-এর set-গুলো 1-এর খুব কাছাকাছি যাচ্ছে, কিন্তু কেউই পুরো 1 অব্ধি যাচ্ছে না। সেই কারণেই cover-এর মধ্যে খালি finite-সংখ্যক set রাখলে এক চিলতে ফাঁক থেকেই যাচ্ছিল।

এই কাণ্ডটা যে করা গিয়েছিল, তার কারণ 1 ছিল $(0,1)$-এর এমন একটা limit point, যেটা $(0,1)$-এর বাইরে। Limit point বলে যত খুশি কাছে যাওয়া যাচ্ছিল, আর $1 \notin (0,1)$ বলে 1-কে ঢাকা দেবার দরকার পড়ছিল না।

তারে ধরি ধরি মনে করি
ধরতে গেলে ধরা দেয় না।

--বাউল গান

ঠিক এই কায়দাতেই আমরা এখানেও একটা contradiction পাব।

Let, if possible, A be not closed. Then A has a limit point $\ell \notin A$.

আমরা এবার এমন ভাবে একটা open cover নেব যাতে এই ℓ-এর যত খুশি কাছে যাওয়া যায়, কিন্তু পুরো ℓ অব্ধি না গিয়ে। তার জন্য একটা কায়দা হল ℓ-কে ঘিরে এক চিলতে জায়গা ছেড়ে বাকীটা দিয়ে set বানানো--

Let $B_r = \{x \in X \;:\; d(\ell, x) > r\}$ for $r > 0$.

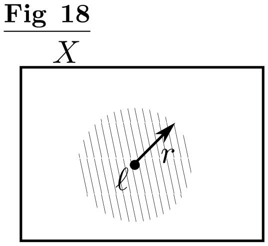
লক্ষ করো, B_r হল প্রায় পুরো X-টাই, খালি ℓ-কে ঘিরে এক চিলতে জায়গা বাদ দিয়ে। এই চিলতেটুকুতে খালি সেই সব বিন্দুরা আছে যারা ℓ থেকে $\leq r$ দূরত্বে রয়েছে, মানে $\overline{N(\ell, r)}$. এখানে আমরা closure নিয়েছি, যাতে দূরত্বটা $\leq r$ হয়, খালি $< r$ নয়। যদি বোঝা না যায়, তবে Fig 18, Fig 19 আর Fig 20 দেখে নাও।
যতই $r > 0$-টা ছোটো হবে, ততই এই চিলতে জায়গাটা কমে আসবে। অতএব--

We notice that $\cap_{r>0} B_r^c = \{\ell\}$, and so, by de Morgan, $\cup_{r>0} B_r = \{\ell\}^c$.
Since $\ell \notin A$, hence $A \subseteq \cup_{r>0} B_r$.
Also, for each $r > 0$ we have $B_r = \overline{N(\ell, r)}^c$. Hence B_r is open in X.
Thus, $\{B_r \;:\; r > 0\}$ is an open cover of A.

ব্যস্, একটা open cover পেয়ে গেলাম।

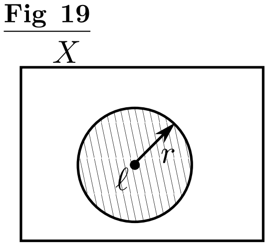
[2]এটা পাবে 195 নম্বর পাতার ধারেকাছে কোথাও।

Fig 18



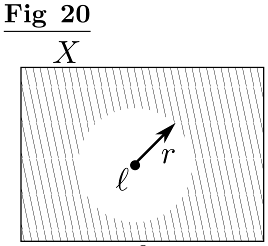
$N(\ell, r)$

Fig 19



$\overline{N(\ell, r)}$

Fig 20



$\left(\overline{N(\ell, r)}\right)^c$

$\because A$ is compact, $\therefore$ there is a finite subcover

$$\{B_{r_1}, ..., B_{r_n}\}.$$

Let $r = \min\{r_1, ..., r_n\}$.
Then $\cup_1^n B_{r_i} = B_r^c$.
So we must have $A \subseteq B_r$, ie, $A \cap B_r^c = \phi$. Hence $A \cap N(\ell, r) = \phi (\Rightarrow\Leftarrow \because \ell$ is a limit point of A).

[Q.E.D]

28.2 Closed and bounded $\implies$ compact ($\mathbb{R}$-এর মধ্যে)

এবার আমরা দেখাব যে ($\mathbb{R}$, Euclidean)-এর মধ্যে কোনো set যদি closed and bounded হয়, তবে সেটা compact হতেও বাধ্য, অর্থাৎ তার যেকোনো open cover-এরই অন্ততঃ একটা finite subcover থাকবে। এই প্রমাণটাই চেয়েছে নীচের অংকটায়।

Example 11: Let the set $E (\subseteq \mathbb{R})$ be closed and bounded. Prove that every open cover of E has a finite subcover.[5] **(2008,2006)**

SOLUTION: প্রমাণটা খুব সহজ নয়। ধাপে ধাপে ভেঙে করব। প্রথমে ধরে নেব যে E একটা interval.

Case I: When E is an interval:

Let $E = [a, b]$ for some $a \leq b$.

যেকোনো closed bounded interval-এর চেহারাই এইরকম হয়। এর মধ্যে একটা trivial case ঢুকে আছে, $a = b$. সেক্ষেত্রে প্রমাণটা খুবই সংক্ষিপ্ত--

If $a = b$, then $E = \{a\}$, which is a finite set, and hence compact.
Next, we consider the situation $a < b$.

আমরা $[a, b]$-কে compact দেখাব, মানে দেখাব যে এর যেকোনো open cover-এরই অন্ততঃ একটা finite subcover আছে।

Let $\{U_\alpha \ : \ \alpha \in I\}$ be an open cover of E. Shall extract a finite subcover.

এবার যেটা করতে চলেছি সেটা বোঝার জন্য একটা গল্প মাথায় রাখলে সুবিধা হবে। গল্পটা পড়ার সময়ে Fig 21-এর দিকে চোখ রেখো। Open cover-টা প্রচুর ছাতার মত $[a, b]$-কে ঢেকে রেখেছে। ধরো একটা লোক a থেকে b-এর দিকে যেতে চায়। কিন্তু সে প্রতিজ্ঞা করেছে যে কেবল মাত্র finite-সংখ্যক ছাতার চেয়ে বেশী কিছু সে ব্যবহার করবে না। তবে সে কত দূর অব্ধি যেতে পারবে? যদি b পর্যন্ত পৌঁছতে পারে তবেই কেল্লা ফতে। আমরা সেটাই দেখাতে চাই। এখনও পর্যন্ত জানি না যে লোকটা সত্যিই কতটা যেতে পারবে। কেবলমাত্র finite-সংখ্যক ছাতা ব্যবহার করে যেসব point অব্ধি লোকটা যেতে পারবে, তাদের set-এর একটা নাম দিয়ে রাখি, B.

Define

$$B = \{c \in [a, b] \ : \ [a, c] \text{ can be covered with finitely many } U_\alpha\text{'s}\}.$$

আমরা শেষ পর্যন্ত দেখাব যে $b \in B$. প্রথমে দেখাই যে B-টা b পর্যন্ত বিস্তৃত, মানে $\sup B = b$.

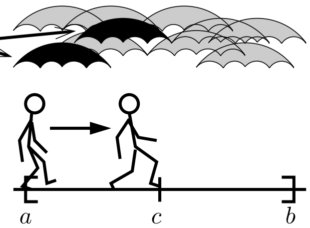


Fig 21

Step 1: Shall show that $\sup(B) = b$.

কিন্তু $\sup B$ আদৌ exist করে তো? তার জন্য দেখতে হবে $B \neq \phi$ এবং bounded from above কিনা--

Clearly, $B \neq \phi$, since $a \in B$.
Also B is bounded above (by b).
So $\ell = \sup B$ exists.

আমরা দেখাব যে $\ell = b$ হবে। কিন্তু আগে দুটো ছোট্ট জিনিস লক্ষ করো, যেগুলো শিগ্‌গিরই কাজে দেবে। প্রথম জিনিসটা হল--

Clearly, $a < \ell$.

⟦ Because:
Since $[a, b]$ is covered by $\{U_\alpha \ : \ \alpha \in I\}$, hence $a \in U_{\alpha^*}$ for some α^*.
Since U_{α^*} is open, hence $\exists \epsilon > 0 \quad (a - \epsilon, a + \epsilon) \subseteq U_{\alpha^*}$.
সুতরাং a থেকে U_{α^*} ছাতাটুকু দিয়েই আরো খানিকটা এগোনো যায়। অবশ্য খেয়াল রাখতে হবে আমরা b-কে টপকে বেরিয়ে না যাই।
Let $c = \min\left\{a + \frac{\epsilon}{2}, b\right\}$.
লক্ষ করো, এই c-টা U_{α^*}-র মধ্যেও আছে, আবার b-কেও পেরিয়ে যায় নি।
Then $c \in U_{\alpha^*} \cap [a, b]$.
অতএব আমরা a থেকে অন্ততঃ c অব্‌ধি একটা ছাতাতেই যেতে পারি।
So $c \in B$.
But $a < c$ and $c \leq \ell$. Hence $a < \ell$, as required.
⟧

দ্বিতীয় জিনিসটা হল--

Also $[a, \ell) \subseteq B$.

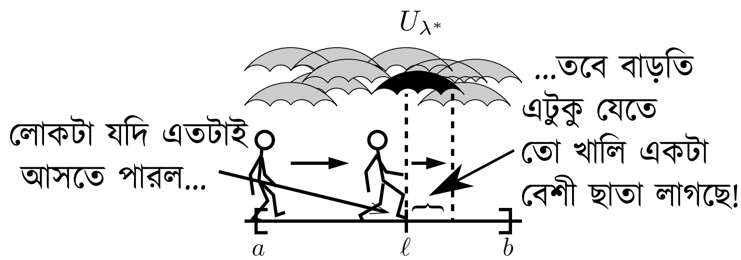


Fig 22

⟦ Because:

If $p \in [a, \ell)$, then $\exists q \in B$ such that $q > p$.
কারণ ℓ-এর চেয়ে ছোটো সংখ্যা p মোটেই B-এর একটা upper bound হতে পারে না।
So $[a, q]$ is covered by finitely many U_α's.
Hence $[a, p] \subseteq [a, q]$ is also covered by finitely many U_α's.
So $p \in B$.

⟧

এবার আবার $\ell = b$ দেখানোতে ফিরে আসি। Fig 22-এর দিকে চোখ রেখো। আমরা contradiction লাগাতে চলেছি।

Clearly, $\ell \leq b$. Let, if possible, $\ell < b$.

Contradiction-টা পাব এইটা দেখিয়ে যে ℓ-এর চেয়ে সামান্য বড় সংখ্যাও B-এর মধ্যে থাকবে (সেটা অসম্ভব, কারণ $\ell = \sup(B)$-এর চেয়ে বড় সংখ্যা B-এর মধ্যে থাকতে পারে না)।

Since $\ell \in [a, b]$, so $\ell \in U_{\lambda^*}$ for some λ^*.

কারণ U_α-গুলো পুরো $[a, b]$-কে ঢেকে রেখেছে।

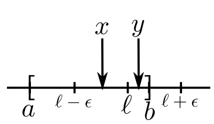
Since U_{λ^*} is open,

$$\exists \epsilon > 0 \quad (\ell - \epsilon, \ell + \epsilon) \subseteq U_{\lambda^*}.$$

Since $a < \ell < b$, we can choose $x, y \in [a, b)$ such that

$$\ell - \epsilon < x < \ell < y < \ell + \epsilon.$$

ছবি ভাবলে এইরকম--



Then $x \in [a, \ell) \subseteq B$.
So $[a, x]$ can be covered by finitely many U_α's.
Also $[x, y]$ is covered by U_{λ^*}
So $[a, y] = [a, x] \cup [x, y]$ is covered by finitely many U_α's. Hence $y \in B (\Rightarrow\Leftarrow \because$

> $y > \ell = \sup B$).
> Hence $\ell = b$, as required.

এতক্ষণ আমরা দেখাচ্ছিলাম যে, $\sup(B) = b$. আসল পরিশ্রমটা ছিল সেখানেই। এবার অনায়াসে দেখাব যে পুরো $[a, b]$-কেই finite-সংখ্যক ছাতার তলায় চাপা দেওয়া যায়--

> Step 2: Shall show $[a, b]$ can be covered with finitely many U_α's.
> Since U_α's cover $[a, b]$, hence $b \in U_{\beta^*}$ for some β^*.
> Since U_{β^*} is open, hence $\exists \epsilon > 0 \quad N(b, \epsilon) \subseteq U_{\beta^*}$.
> $\because b = \sup B, \therefore \exists c \in B \quad c > b - \epsilon$.
> Thus, $[a, c]$ can be covered by finitely many U_α's.
> Also $[c, b]$ can be covered by just U_{β^*}.
> So $[a, b] = [a, c] \cup [c, b]$ can be covered by finitely many U_α's, as required.

এতক্ষণ ধরে নিয়েছিলাম যে E একটা interval. এবার যে কোনো closed, bounded set-এর জন্য প্রমাণটা করব।

> Case 2: When $E \subseteq \mathbb{R}$ is any closed and bounded set:
> Since E is bounded, $\exists M$ such that $E \subseteq [-M, M]$.
> Let $\{U_\alpha \ : \ \alpha \in I\}$ be any open cover of E.
> Then $\{U_\alpha \ : \ \alpha \in I\} \cup E^c$ is an open cover of $[-M, M]$, since E is closed.

এটা কেন হল, বুঝলে তো? আসলে U_α-গুলো দিয়ে E-টা ঢাকা পারছে, আর E^c দিয়ে ঢাকা পড়ছে তার বাইরে সবকিছু। তাই $\{U_\alpha \ : \ \alpha \in I\} \cup \{E^c\}$ আসলে পুরো $\mathbb{R}$-এরই cover. সুতরাং $[-M, M]$-ও তার তলায় চাপা না পড়ে যায় কী করে? পুরো হনুমানের কায়দা, আস্ত গন্ধমাদনই উঠিয়ে আনলে বিশল্যকরণীও আনা হয়!

> Applying case 1 we get a finite subcover for $[-M, M]$. Since $E \subseteq [-M, M]$, this is also a finite subcover for E, removing E^c, if necessary.

এখানে "removing E^c, if necessary" জায়গাটায় ভাষার সামান্য প্যাঁচ আছে। আমরা যে finite subcover-টা বার করলাম সেটা $[-M, M]$-এর জন্য, এবং তার মধ্যে E^c-ও থাকতে পারে। আমাদের দরকার খালি E-কে ঢাকা দেওয়া। সেই কাজে E^c কোনো সাহায্য করবে না, সেই জন্যই বলেছি যে, E^c যদি তোমার finite subcover-এ থাকেও তো ওটাকে স্রেফ ছুঁড়ে ফেলে দাও। ■

DAY 29
পরিচিত ধর্মগুলো

গতকাল আমরা দেখিয়েছি যে, $\mathbb{R}$-এর মধ্যে compact set-গুলো হচ্ছে আসলে closed and bounded set-গুলোই। Real analysis শেখার সময়ে আমরা closed and bounded set-দের যে সব ভালো ভালো ধর্মগুলোর কথা শিখেছিলাম, এবার আমরা দেখব অন্যান্য metric space-এর বেলাতেও compact set-দের সেই সব ভালো ভালো ধর্ম আছে।

29.1 Bolzanno-Weierstrass

Bolzanno-Weierstrass theorem-টা চট্ করে মনে করিয়ে দিই আরেকবার--যদি কোনো closed and bounded set নাও ($\mathbb{R}$, Euclidean)-এর মধ্যে (ধরো A), তাহলে A-র যাবতীয় infinite subset-এরই অন্ততঃ একটা limit point থাকবে A-র মধ্যেই। যদি compact set নিয়ে কাজ করো, তবে যেকোনো metric space-এই এই ভালো ধর্মটা পাবে। সেটাই নীচের theorem-টার বক্তব্য।

> THEOREM
> Let (X, d) be a metric space. Let $A \subseteq X$ be compact. Then every infinite subset of A must have a limit point in A.

Proof: অনেক সময়ে এই theorem-টাকে লোকে একটু সংক্ষেপে লেখে $A = X$ নিয়ে। সেক্ষেত্রে বক্তব্যটা দাঁড়ায়--

Every infinite subset of a compact metric space has a limit point.

যাই হোক, আমরা প্রমাণের সময়ে $A \subseteq X$ নিয়েই কাজ করব। তাতে $A = X$ কেসটাও ঢুকে যাবে। প্রমাণটা হবে contradiction-এর পথে।

> Let, if possible, $B \subseteq A$ be an infinite set that has no limit point in A.
> Then $\forall a \in A \quad \exists \epsilon_a > 0 \quad N'(a, \epsilon_a) \cap B = \phi$.

এটা কী করে পেলাম বোঝা গেল? যদি বলতাম B-এর একটা limit point আছে A-র মধ্যে, তবে সেটা অংকের ভাষায় হত

$$\exists a \in A \quad \forall \epsilon > 0 \quad N'(a, \epsilon) \cap B \neq \phi.$$

আমরা এটারই negation নিয়েছি, মানে $\forall$-গুলোকে $\exists$, আর $\exists$-গুলো $\forall$ করে দিয়েছি, আর সব শেষের $\neq$-কে উল্টে $=$ করে দিয়েছি। এর ফলে $\forall a \in A$-র পরে আসছে $\exists \epsilon > 0$. তাই ϵ-টা a-র উপর নির্ভর করতে পারে। সেই নির্ভরতাটা প্রকট করতেই ϵ_a লেখা।

> Let $U_a = N(a, \epsilon_a)$ for $a \in A$.
> Then $\{U_a \ : \ a \in A\}$ is an open cover of A.

অর্থাৎ আমরা A-র প্রতিটা বিন্দুতেই ϵ_a মাপের একটা করে ছাতা বসিয়েছি।

> Since A is compact, hence there is a finite subcover $\{U_{a_1}, ..., U_{a_n}\}$.
> Now $B = B \cap A = B \cap (U_{a_1} \cup \cdots \cup U_{a_n}) = (B \cap U_{a_1}) \cup \cdots \cup (B \cap U_{a_n})$.
> Note that each $B \cap U_{a_i}$ is either singleton or empty.

কারণ যাই $a \in X$ নাও না কেন $N'(a, \epsilon_a) \cap B = \phi$, তাই $N(a, \epsilon_a) \cap B$ হবে হয় ϕ নয়তো $\{a\}$.

> Hence $|B| \leq n (\Rightarrow\Leftarrow \because B$ is infinite$)$.

[Q.E.D]

একই কায়দায় নীচের theorem-টাও দেখানো যাবে। এটা Bolzanno-Weierstrass theorem-এর sequence সংস্করণ।

> **THEOREM**
> Let (X, d) be a metric space. Let $A \subseteq X$ be compact. Then every infinite sequence in A must have a subsequence that converges in A.

Exercise 8: এই theorem-টার প্রমাণটা গুছিয়ে লেখো দেখি!
HINT: যেকোনো sequence-এরই term-গুলো নিয়ে একটা set হয়। যেমন $\{(-1)^n\}_n$-এর বেলায় set-টা হল $\{-1, 1\}$. যদি কোনো sequence-এর বেলায় এই set-টা finite হয়, তবে বুঝতে হবে অন্ততঃ একটা সংখ্যা সেই sequence-এ অসংখ্য term-এ এসেছে। সুতরাং সেই term-গুলো মিলেই একটা convergent subsequence হয়ে যাবে।
যদি set-টা infinite হয়, তবে সেই set-এর উপরে আগের theorem-টা লাগালেই চলবে। ■

29.2 Continuous functions...

Real analysis-এর closed and bounded set-দের একটা ধর্ম দেখেছিলাম এইরকম--

> যদি কোনো closed and bounded set-এর উপর কোনো real-valued continuous function নাও, তবে সেটা bounded হতে বাধ্য, এবং তার maximum ও minimum-ও থাকতে বাধ্য।

এবার দেখব যে, যেকোনো metric space-এই compact set-দের এই ধর্মটা আছে। নীচের theorem-এর boundedness-টা দেখাব। তারপরে maximum/minimum নিয়ে কাজ করব।

> **THEOREM**
> Let (X, d) be a metric space. Let $A \subseteq X$ be compact. Let $f : A \to \mathbb{R}$ be any continuous function. Then f must be bounded.

Proof: আমরা contradiction-এর পথে এগোব।

> Let, if possible, f be unbounded.

অর্থাৎ কিনা, যত উঁচু ছাদই বসাও না কেন, এমন $a \in A$ পাবে যাতে $|f(a)|$ সেই ছাদ ফুঁড়ে বেরিয়ে যাবে। ছাদের উচ্চতা যদি ধাপে ধাপে $1, 2, 3, \ldots$ করে বাড়াতে থাকি, তবেই পাবে--

> Then $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists a_n \in A \quad |f(a_n)| > n$.
> Thus, we get a sequence $\{a_n\}_n \subseteq A$.
> Since A is compact, so there is a subsequence $\{a_{n_k}\}_k$ such that $a_{n_k} \to \ell$ for some $\ell \in A$.

এখানে আমরা Bolzanno-Weierstrass theorem-এর sequence সংস্করণটা লাগালাম।

> So, by continuity of f, we have $f(a_{n_k}) \to f(\ell) \in \mathbb{R}$.
> Hence $|f(a_{n_k})| \to |f(\ell)|$.
> Yet $|f(a_{n_k})| > n_k \to \infty (\Rightarrow\Leftarrow)$.

∎

এখানে contradiction-টা হল, কারণ দেখা যাচ্ছে $|f(a_{n-K})|$-গুলো একই সঙ্গে ∞-এর দিকেও যাচ্ছে, আবার $|f(\ell)| \in \mathbb{R}$-এর দিকেও যাচ্ছে। দুটোই একসাথে হয় কী করে? **[Q.E.D]**

এইবার আমরা maximum/minimum-এর অস্তিত্ব দেখাব।

> THEOREM
> Let (X, d) be a metric space. Let $A \subseteq X$ be compact. Let $f : A \to \mathbb{R}$ be any continuous function. Then f must attain maximum and minimum in A.

Proof:

> <u>Step 1:</u> Shall show f attains maximum:
>
> By standard result, f must be a bounded function on A.

এই "standard result"-টা আসলে আগের theorem-টাই।

> So $\ell = \sup f(A)$ exists in $\mathbb{R}$.

আমরা এবার এমন একটা $t \in A$ দেখাতে চাই, যাতে $f(t) = \ell$ হয়। তাহলেই প্রমাণ হয়ে যাবে যে ℓ হল f-এর maximum value.

> Since $\ell = \sup f(A)$, hence $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists a_n \in A \quad f(a_n) > \ell - \frac{1}{n}$.

এইটা একটা বহুলব্যবহৃত কৌশল। যেহেতু ℓ হল সবচেয়ে ছোটো upper bounded, তাই কোনো $n \in \mathbb{N}$-এর জন্যই $\ell - \frac{1}{n}$ একটা upper bound হতে পারে না, অর্থাৎ A-র মধ্যে এমন কোনো a_n থাকবে যাতে $f(a_n) > \ell - \frac{1}{n}$ হয়ে যায়।

> So we get a sequence $\{a_n\}_n \subseteq A$.
>
> Note that $f(a_n) \to \ell$.
>
> ⟦ <u>Because:</u>
>
> $\because \ell - \frac{1}{n} \le f(a_n) \le \ell$,
>
> $\therefore$ by sandwich rule, $f(a_n) \to \ell$.
>
> ⟧
>
> By Bolzanno-Weierstrass property of compact sets, there must be a subsequence $\{a_{n_k}\}_k$ with $a_{n_k} \to t$ for some $t \in A$.
>
> Since f is continuous, $f(a_{n_k}) \to f(t)$.
>
> But $f(a_n) \to \ell$. Hence $f(a_{n_k}) \to \ell$.
>
> So $f(t) = \ell$.
>
> Thus the supremum ℓ is attained by f at $t \in A$. So ℓ is actually the maximum value of f over A. Thus, f attains its maximum, as required.

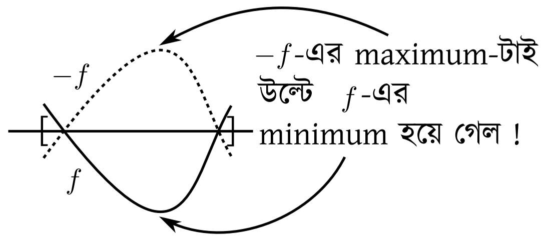


Fig 23

∎

এবার minimum-এর দিকটা--

> Step 2: Shall show that f attains its minimum:
> Since f is continuous, so is $-f$. By step 1, $-f$ attains its maximum.
> Hence f attains its minimum there, as required.

কীভাবে $-f$-এর maximum থেকে f-এর minimum-এ পৌঁছলাম, সেটা Fig 23-এর দেখিয়েছি। **[Q.E.D]**

এই দুটো theorem-এ আমরা real-valued function নিয়ে কাজ করেছিলাম। বিশেষ করে দ্বিতীয় theorem-টায় maximum আর minimum-এর প্রসঙ্গ ছিল, যার জন্য $\leq$-এর ধারণাটা দরকার। সেই ধারণাটা $\mathbb{R}$-এর মধ্যে আছে, কিন্তু যেকোনো metric space-এ নাই থাকতে পারে। যাই হোক, real-valued function নিয়ে কাজ না করলেও প্রথম theorem-টা কিন্তু অক্ষুণ্ণ রাখা যায়। সেখান থেকেই নীচের অংকটা তৈরী।

Exercise 9: Let (X, d_1), (Y, d_2) be two metric spaces. Let $A \subseteq X$ be compact. Let $f : A \to Y$ be any continuous function. Then show that f must be bounded. ∎

আসলে এই অংকটার চেয়েও আরো অনেক জোরালো কথা বলা যায়। A যদি compact, এবং f যদি continuous হয়, তবে $f(A)$ যে শুধু bounded হবে তাই নয়, compact-ও হতে বাধ্য!

> **THEOREM**
>
> Let (X, d_1) and (Y, d_2) be two metric spaces. Let $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ be a continuous function. Let $A \subseteq X$ be a compact set. Then $f(A)$ must also be compact.

Proof: আমাদের $f(A)$-কে compact দেখাতে হবে। সরাসরি সংজ্ঞা লাগাব, মানে দেখাব যে, যেকোনো open cover-এর থেকেই finite subcover বার করা যাবে। মনশ্চক্ষে এইরকম একটা টার্গেট বানিয়ে লট্‌কে দাও--

$$\forall \text{ open cover } \exists \text{ finite subcover }.$$

প্রথমেই $\forall$ আছে, অতএব--

> Take any open cover $\{U_\alpha \ : \ \alpha \in I\}$ of $f(A)$ in (Y, d_2).

আমাদের দেওয়া আছে A-টা compact. কোনোভাবে U_α-দের যদি A-তে এনে ফেলতে পারি, তবে সুবিধা হবে।

Define $V_\alpha = f^{-1}(U_\alpha)$ for $\alpha \in I$.
By continuity of f, we know that V_α must be open in (X, d_1).
Also, $\{V_\alpha \ : \ \alpha \in I\}$ is a cover for A.

⟦ Because:

$\because f(A) \subseteq \cup_{\alpha \in I} U_\alpha$,
এবার আমরা preimage-এর দুটো ধর্ম কাজে লাগাব, $M \subseteq N$ হলে
$f^{-1}(M) \subseteq f^{-1}(N)$ হয়, এবং $f^{-1}(\cup_\alpha U_\alpha) = \cup_\alpha f^{-1}(U_\alpha)$ হয়।
Hence $A \subseteq \cup_{\alpha \in I} f^{-1}(U_\alpha) = \cup_{\alpha \in I} V_\alpha$.

⟧

By compactness of A, we can get a finite subcover $\{V_{\alpha_i} \ : \ i = 1, ..., n\}$.

এবার V_α-দের থেকে ফের U_α-দের কাছে ফিরে যাব।

Then $\{U_{\alpha_i} \ : \ i = 1, ..., n\}$ must be a cover for $f(A)$.

⟦ Because:

Since $A \subseteq \cup_1^n V_{\alpha_i}$,
hence $f(A) \subseteq \cup_1^n f(V_{\alpha_i}) \subseteq \cup_1^n U_{\alpha_i}$.

⟧

Hence we have obtained a finite subcover from any arbitrary open cover of $f(A)$.
Thus $f(A)$ is compact, as required.

[Q.E.D]

29.3 Uniform continuity

Real analysis-এ দেখেছি যে closed and bounded set-দের উপরে continuous function-রা uniformly continuous-ও হয়। এবার দেখাব যে, যেকোনো metric space-এর বেলাতেই compact set-দের একই গুণ আছে।

THEOREM

Let (X, d_1) and (Y, d_2) be two metric spaces. Let $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ be a continuous function. If (X, d_1) is a compact metric space, then f must be uniformly continuous.

Proof: প্রমাণটা খুব বড় নয়, তবে মাথা ঠাণ্ডা রেখে এগোতে হবে।

To show $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall a \in X \ \ \forall x \in N_X(a, \delta) \quad f(x) \in N_Y(f(a), \epsilon)$.

আমরা contradiction লাগাব--

> Let, if possible, this be false, ie,
>
> $$\exists \epsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists a \in X \ \exists x \in N_X(a, \delta) \quad f(x) \notin N_Y(f(a), \epsilon).$$

এটা পেয়েছি যেটা দেখাতে হবে সেটার negation নিয়ে, মানে $\forall$-দের $\exists$, আর $\exists$-দের $\forall$ করে দিয়ে, এবং সব শেষের '$\in$'-টাকে উল্টে '$\notin$' বানিয়ে।

> We keep this $\epsilon > 0$ fixed.

এবার সেই বহুলব্যবহৃত কায়দা, δ-র জায়গায় $\frac{1}{n}$ বসানো--

> Putting $\delta = \frac{1}{n}$ for $n = 1, 2, ...,$
>
> $$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists a_n \in X \ \exists x_n \in N_X\left(a_n, \tfrac{1}{n}\right) \quad f(x_n) \notin N_Y(f(a_n), \epsilon).$$
>
> Thus, we get two sequences $\{a_n\}_n, \{x_n\}_n \subseteq X$ such that for each $n \in \mathbb{N}$ we have $d_X(a_n, x_n) < \frac{1}{n}$ and $d_Y(f(a_n), f(x_n)) \geq \epsilon$.

এ যাবৎ X-এর compactness কাজে লাগাই নি, এবার লাগাব--

> Since X is compact, hence we can find a convergent subsequence $\{a_{n_k}\}_k$.
>
> Let $a_{n_k} \to \ell$ for some $\ell \in X$.
> Since $d_X(a_n, x_n) < \frac{1}{n}$, hence $x_{n_k} \to \ell$ also.
> Since f is continuous, hence $f(a_{n_k}) \to f(\ell)$ and $f(x_{n_k}) \to f(\ell)$.
> Thus, $d_Y(f(a_{n_k}), f(x_{n_k})) \to 0 (\Rightarrow\Leftarrow \because \forall n \in \mathbb{N} \quad d_Y(f(a_n), f(x_n)) \geq \epsilon)$.

[Q.E.D]

DAY 30
অন্যান্য ধর্ম (part 1)

গতকাল যে ধর্মগুলো আলোচনা করেছি, সেগুলো সবই real analysis থেকেই আমাদের জানা ছিল। আজকে নতুন কিছু ধর্ম শিখব, যেগুলো হয়তো তোমরা আগে কখনো দ্যাখো নি।

30.1 Finite intersection property

আমরা জানি যে, open আর closed set-রা পরস্পরের complement হয়। সেই সুবাদে open set-দের নিয়ে কোনো বক্তব্যকে "উল্টে" closed set-দের নিয়ে একটা বক্তব্যে পরিণত করা যায়। এর সহজতম উদাহরণ আমরা real analysis-এই শিখে থাকি--

Arbitrary union of open sets is open.

একে "উল্টে" পাওয়া যায়--

Arbitrary intersection of closed sets is closed.

আরেকটা উদাহরণ হল--

Finite union of closed sets is closed.

এটাকে "উল্টে" পাবে

Finite intersection of open sets is open.

এই "ওল্টানো"-র কাজে প্রধান হাতিয়ার হল de Morgan's law দুটো--

$$\begin{aligned}\big(\cup_\alpha A_\alpha\big)^c &= \cap_\alpha A_\alpha^c\\ \big(\cap_\alpha A_\alpha\big)^c &= \cup_\alpha A_\alpha^c.\end{aligned}$$

এই একই হাতিয়ার যদি আমরা compact set-এর সংজ্ঞায় লাগাই, তবে পুরো ব্যাপারটাকে আমরা closed set দিয়ে লিখতে পারি। একটু গা গরম করে নেওয়া যাক। Compact set-এর আলোচনায় প্রধান ভূমিকায় আছে open cover-এর ধারণাটা। আমরা বলি $\{A_\alpha ~:~ \alpha\in I\}$ হল (X,d)-এর একটা open cover যদি A_α-রা সবাই open হয় এবং $\cup_{\alpha\in I}A_\alpha = X$ হয়। এর উপরে de Morgan লাগালে পাব $\cap_{\alpha\in I}A_\alpha^c = X^c=\phi.$ মনে রেখো এখানে সবগুলো complement-ই নেওয়া হচ্ছে X-এর সাপেক্ষে, A^c মানে $X\setminus A.$ সেই কারণেই $X^c = X\setminus X=\phi$ হয়েছে।
তাহলে সব মিলিয়ে পাওয়া গেল, $\{A_\alpha^c ~:~ \alpha\in I\}$ এমন একটা collection, যার প্রতিটা সদস্যই একেকটা closed set, এবং যাদের intersection হল $\phi.$ একইভাবে যদি $\{A_{\alpha_1},...,A_{\alpha_n}\}$ একটা finite subcover হয়, তবে $\{A_{\alpha_1}^c,...,A_{\alpha_n}^c\}$ হবে এমন একটা subcollection, যার intersection হবে $\phi.$ সুতরাং আমরা compact metric space-এর সংজ্ঞাকে "উল্টে" পাচ্ছি--

THEOREM

A metric space (X,d) is compact if and only if for every collection of closed sets with empty intersection there is a finite subcollection with empty intersection.

কী করে প্রমাণ করতে হবে সে তো এক্ষুণি লিখলাম। গুছিয়ে লেখার দায়িত্ব তোমার উপরেই রইল।
Open set-এর বদলে closed set ব্যবহার করায় compactness-এর সংজ্ঞাটা দেখতে কীরকম বদলে গেল। আমরা এটাকে আরো সামান্য একটু বদলাব, আরেকভাবে "উল্টে" দিয়ে। আমরা জানি যে $A\implies B$ আর not $B\implies$ not A একই কথা। এদেরকে বলে পরস্পরের **contrapositive**. যেমন "নড়লেই গুলি করব" আর "গুলি খেতে না চাইলে নড়বেন না", সেরকম আর কি! আমাদের theorem-টায় একগুচ্ছ closed set দিয়ে বলেছে

যদি

এদের intersection হয় ϕ,

তবে

তাদের মধ্যে এমন finite-সংখ্যক set পাবে, যাদের intersection-ও হবে ϕ.

এর contrapositive হবে এইরকম--

যদি

এদের মধ্যে যেকোনো finite-সংখ্যক set-এরই intersection হয় nonempty,

তবে

সবগুলোর intersection-ও nonempty হতে বাধ্য।

এদের মধ্যে "যদি"-র পরে যে শর্তটা রয়েছে, সেটা যে খুবই বিচ্ছিরি দেখতে সন্দেহ নেই। সেটাকে লোকে একটা ভদ্রগোছের নাম দিয়েছে, **finite intersection property.**

DEFINITION: **Finite intersection property (FIP)**

A collection of sets is said to have the **finite intersection property** if every finite subcollection has nonempty intersection.

এবার আমাদের contrapositive শর্তটাকে একটা theorem-এর আকারে লেখা যাক।

THEOREM

A metric space is compact if and only if every collection of closed sets with FIP has nonempty intersection.

Proof: এটা একটা if and only if জাতীয় জিনিস। প্রমাণটা তাই দুইভাগে ভেঙে করব।

<u>If part:</u> We assume that every collection of closed sets with FIP has nonempty intersection.

Shall show that the metric space is compact, ie, every open cover has a finite subcover.

Let $\{A_\alpha \ : \ \alpha \in I\}$ be any open cover.

Then $\cup_\alpha A_\alpha = X$.

Hence, by de Morgan, $\cap_\alpha A_\alpha^c = X^c = \phi$.

Now, $\{A_\alpha^c \ : \ \alpha \in I\}$ is a collection of closed sets.

This collection cannot have FIP.

⟦ <u>Because:</u>

Otherwise, by our assumption, $\cap_\alpha A_\alpha^c \neq \phi$.

⟧

So there must exist a finite subcollection $\{A_{\alpha_1}^c, ..., A_{\alpha_n}^c\}$ such that

$$\cap_{i=1}^n A_{\alpha_i}^c = \phi.$$

By de Morgan, we must have

$$\cup_{i=1}^n A_{\alpha_i} = \phi^c = X.$$

Thus, we have got a finite subcover $\{A_{\alpha_1}, ..., A_{\alpha_n}\}$, as required.

এবার উল্টোদিকটা। এক্ষুণি যে যুক্তিটা দিলাম, সেটাই বলতে গেলে উল্টে লিখে দেব--

Only if part: We assume that X is compact. Shall show that every collection of closed sets with FIP has nonempty intersection.

Let $\{B_\alpha \ : \ \alpha \in J\}$ be any collection of closed sets with FIP. Shall show $\cap_\alpha B_\alpha \neq \phi$.

Let, if possible, this be false. Then $\cap_\alpha B_\alpha = \phi$.

So, by de Morgan, $\cup_\alpha B_\alpha^c = X$.

Also B_α^c's are all open in X.

So $\{B_\alpha^c \ : \ \alpha \in J\}$ is an open cover of X.

By compactness of X, we can extract a finite subcover $\{B_{\alpha_1}^c, ..., B_{\alpha_n}^c\}$.

Thus, $\cup_{i=1}^n B_{\alpha_i}^c = X$.

By, de Morgan, $\cap_{i=1}^n B_{\alpha_i} = \phi (\Rightarrow\Leftarrow \because \{B_\alpha \ : \ \alpha \in J\}$ has FIP$)$.

[Q.E.D]

30.2 Completeness-এর সঙ্গে সম্পর্ক

আমরা জানি যে, convergent sequence-রা সবাই Cauchy-ও হয়। অবশ্য এমন Cauchy sequence সম্ভব, যেটা convergent নয়, যেমন metric space-টা যদি $(0,1]$ নিই (Euclidean metric), তবে $\left\{\frac{1}{n}\right\}_n$ একটা Cauchy sequence, কিন্তু মোটেই convergent নয় (কারণ $\mathbb{R}$-এর মধ্যে ওর limit হল 0, যেটা $(0,1]$-এর বাইরে)। একটা sequence যদি convergent না হয়, তবে স্বভাবতঃই প্রশ্ন ওঠে--ওর কোনো subsequence আছে কিনা, যেটা converge করে। মজা হল, Cauchy sequence-দের বেলায় সেটা অসম্ভব। কারণ, Cauchy হওয়া মানেই term-গুলো সবাই শেষের দিকে গিয়ে সাংঘাতিক গাদাগাদি করে ভীড় করছে, অতএব সব subsequence-এর আচরণই একই হবে, যদি একজনও কোথাও converge করে তো সকলেই সেখানে গিয়ে converge করবে, মানে পুরো sequence-টাই convergent হয়ে যাবে।

এই কথাটা ভালো করে বুঝে নাও। এবার মনে করো একটা metric space-কে compact বলা আছে। তার ভিতর যেকোনো একটা Cauchy sequence নিলে সেটা কি converge করতে বাধ্য? নিজে নিজে ভেবে নাও আগে। তাহলে নীচের theorem-টা তুমিই আবিষ্কার করতে পারবে।

> **THEOREM**
> A compact metric space must be complete.

Proof:

We take any Cauchy sequence in this metric space.

Since the metric space is compact, hence there must exist a convergent subsequence.

Since the sequence is Cauchy, hence the entire sequence must converge.

> Thus every Cauchy sequence is convergent. So the metric space is complete, as required.

[Q.E.D]

অবশ্যই এর উল্টো দিকটা (মানে converse-টা) নিয়ে চিন্তা করতে ভুলো না--

Exercise 10: যেকোনো complete metric space-ই কি compact হতে বাধ্য? ■

30.3 উল্টো প্যাঁচ

অংকের জগতে প্রচুর theorem-এর ছড়াছড়ি। মনে স্বভাবতঃই প্রশ্ন জাগে--লোকের মাথায় এতসব এলো কী করে? এই প্রশ্নের যদিও এক কথায় কোনো উত্তর হয় না, তবু অংকের বহু শাখার বিস্তারের পিছনেই একটা চিন্তা কাজ করেছে-- একটা জিনিস পেলেই সেটাকে উল্টে দেখা। যেমন যোগকে উল্টে বিয়োগ, এবং সেখান থেকে negative সংখ্যার উদ্ভব, square-কে উল্টে square root, এবং সেখান থেকে complex সংখ্যা, differentiation-কে উল্টে integration, ইত্যাদি।

এই কায়দায় অনেক সময়ে ইন্টারভিউ নেবার সময়ে ছাত্রছাত্রীদের প্যাঁচে ফেলে দেওয়া হয়। একটা পরিচিত জিনিসকে হঠাৎ উল্টে দিলে সেটা অনেক সময়েই রীতিমত নতুন হয়ে ওঠে। সেরকম কয়েকটা জিনিস এবার দেখব।

> এই না বলে ডাইনে বাঁয়ে লক্ষ দিয়ে হুশ্ করে
> হঠাৎ খেয়ে ডিগ্বাজি ফেললে আমায় 'পুশ্' করে!
>
> --সুকুমার রায়

30.3.1 সব sequence-এর convergent subsequence থাকলে...

আমরা আগেই দেখেছি যে, একটা compact metric space-এর মধ্যে কোনো infinite sequence নিলে তার একটা convergent subsequence থাকতে বাধ্য। এর উল্টোটাও কি ঠিক? এর উল্টোটা বলতে কী বোঝাচ্ছি, সেটা আগে একটা সংজ্ঞার আকারে লিখে নেওয়া যাক--

DEFINITION: Sequentially compact

A metric space is called **sequentially compact** if every sequence in it has a convergent subsequence.

এখানে convergent বলা মানে কিন্তু limit-টাকে ওই metric space-এর মধ্যেই থাকতে হবে। যেমন ধরো $(0,1]$-কে তুমি তোমার metric space নিলে, Euclidean metric. তবে কিন্তু $\{\frac{1}{n}\}_n$ মোটেই convergent নয়, কারণ $0 \not\in (0,1]$.
যাই হোক, আমাদের প্রশ্নটা তাহলে হল--

একটা metric space যদি sequentially compact হয়, তবে কি সেটা compact হতেও বাধ্য?

উত্তরটা হ্যাঁ, কিন্তু প্রমাণটা খুব সহজ নয়। ধাপে ধাপে এগোই। প্রথম ধাপ হল নীচের অংকটা।

Example 12: ধরো (X,d) হল sequentially compact. আমাদের দেখাতে হবে যে, তাহলে X-এর যেকোনো open cover-এরই একটা finite subcover থাকবে। এই অংকে আমরা যেকোনো open cover না নিয়ে একটা বিশেষ ধরণের open cover নেব। তার জন্য প্রথমে যা খুশি একটা $\epsilon > 0$ নাও। তাহলে $\{N(x,\epsilon) \;:\; x \in X\}$ অবশ্যই X-এর একটা open cover হবে। দেখাও যে এর একটা finite subcover থাকতে বাধ্য।

SOLUTION: যদি X-টা নিজেই finite হয়, তবে তো X-টা compact আছেই--

Case 1: X is finite: Any finite metric space is compact. So we can extract a finite subcover from the given cover, as required.

যদি X-টা infinite হয়, তবে আমরা contradiction-এর পথে এগোব। ধরো কোনো finite subcover নেই।

Case 2: X is infinite:

Let, if possible, there be no finite subcover for this cover.

তাহলে আমরা X-এর মধ্যে একটা infinite sequence বার করে দেব, যার কোনো convergent subsequence নেই। ব্যস্, তাহলেই contradiction হয়ে যাবে! এরকম infinite sequence বার করাটা খুবই সহজ। প্রথমে X-এর যা খুশি একটা সদস্য নাও, এটাই আমাদের sequence-এর প্রথম term, মানে x_1.

Pick any $x_1 \in X$.

যেহেতু আমাদের cover-টার কোনো finite subcover নেই, তাই $N(x_1, \epsilon)$ দিয়ে পুরো X ঢাকা পড়তে পারে না। সুতরাং $N(x_1, \epsilon)$-এর বাইরেও X-এর সদস্য থাকতে বাধ্য। এরকম যেকোনো একটা x_2 নাও, এটাই আমাদের sequence-এর দ্বিতীয় term হল।

By the given condition, $X \not\subseteq N(x_1, \epsilon)$.

So can pick $x_2 \in X \setminus N(x_1, \epsilon)$.

যেহেতু আমাদের cover-টার কোনো finite subcover নেই, তাই $N(x_1, \epsilon)$ আর $N(x_2, \epsilon)$ দুজনে মিলেও X-কে ঢাকতে পারবে না, তাই এমন x_3 পাবে যেটা $N(x_1, \epsilon) \cup N(x_2, \epsilon)$-এর বাইরে।

Again, $X \not\subseteq N(x_1, \epsilon) \cup N(x_2, \epsilon)$.

So can pick $x_3 \in X \setminus \big[N(x_1, \epsilon) \cup N(x_2, \epsilon)\big]$.

কায়দাটা বুঝতে পারছ? এইভাবে তুমি পরপর $x_1, x_2, x_3, x_4, ...$ ইত্যাদি নির্বাচন করে যেতে পারবে।

Continuing like this, we get a sequence $\{x_n\}_n$.

লক্ষ করো প্রতিটা x_i-ই বাকিদের থেকে $\geq \epsilon$ দূরত্বে আছে, মানে ফাঁক ফাঁক হয়ে আছে। সুতরাং $\{x_n\}_n$-এর আর convergent subsequence হবে কী করে?

Since $\forall i \neq j \quad x_i \notin N(x_j, \epsilon)$, hence $\{x_n\}_n$ cannot have a convergence subsequence $(\Rightarrow\Leftarrow)$.

■

এই অংকটায় আমরা কাজ করলাম এমন একটা open cover নিয়ে, যার প্রত্যেকটাই সদস্যই একেকটা ball, এবং সবারই radius হল একই ϵ. সেই কারণেই এই "ফাঁক ফাঁক" ব্যাপারটা হল। কিন্তু যেকোনো open cover-এর ক্ষেত্রে সেটা নাও হতে পারত, কারণ এমন হতেই পারে যে cover-এর set-গুলো হয়তো ক্রমশঃই ছোটো হতে হতে একেবারে মিলিয়ে যাচ্ছে। কিন্তু তাও আসলে এই একই কায়দা লাগানো যায়। তার জন্য দরকার একটা কৌশল। রীতিমত জবরদস্ত্ কৌশল, যেটা না জানা থাকলে আন্দাজ করা কঠিন, এবং বলে দিলেও বিশ্বাস হতে চায় না। সেটাই রয়েছে নীচের theorem-টায়, যার নাম Lebesgue (লেবেগ্) Number Theorem.

Lebesgue number theorem

Let (X,d) be a sequentially compact metric space. Let $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ be an open cover of X. Then

$$\exists\delta > 0 \quad \forall x \in X \quad \exists\alpha \in I \quad N(x,\delta) \subseteq A_\alpha.$$

Any such $\delta > 0$ is a called a **Lebesgue number** for this open cover.

Proof: প্রথমে ছবি দিয়ে বুঝে নেওয়া যাক বক্তব্যটা কী। আমরা শুরু করছি একটা sequentially compact metric space এবং তার একটা open cover নিয়ে। Cover-টার সদস্যরা কেউ বড় কেউ ছোটো হতে পারে। এই theorem-টার চেষ্টা হচ্ছে মোটামুটিভাবে এই বলা যে "খুব ছোটোদের বাদ দিলেও" এটা একটা cover-ই থাকবে। খুব ছোটো মানে? মানে--

> এমন একটা $\delta > 0$ পাবে $(\exists\delta > 0)$, যাতে তুমি যেকোনো $x \in X$-এই ওই radius-এর একটা ছাতা বসাও না কেন $(\forall x \in X)$, পুরো ছাতাটাই cover-টার কোনো একটা সদস্যের মধ্যে থাকবে, মানে এমন একটা সদস্য পাবে $(\exists\alpha \in I)$, যাতে ছাতাটা ওই সদস্যের ভিতরে থাকে $(N(x,\delta) \subseteq A_\alpha)$.

অতএব, cover-টার যে সব সদস্যদের পেটের ভিতর ওই সাইজের ছাতা ফিট করে না, তাদেরকে cover থেকে বাদ দিলেও cover-টা cover-ই থাকবে।
এবার তবে প্রমাণটা শুরু করা যাক। Contradiction লাগাব।

> Let, if possible, this be false. Then
>
> $$\forall\delta > 0 \quad \exists x \in X \quad \forall\alpha \in I \quad N(x,\delta) \not\subseteq A_\alpha.$$

যেটা দেখানোর কথা ছিল, তার negation নিয়ে এটা পেয়েছি। এবার আমরা সেই বহুলব্যবহৃত কায়দা লাগাব, δ-র জায়গায় $\frac{1}{n}$ বসানো--

> Taking $\delta = \frac{1}{n}$ for $n \in \mathbb{N}$, we have
>
> $$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in X \quad \forall\alpha \in I \quad N\left(x_n, \tfrac{1}{n}\right) \not\subseteq A_\alpha.$$

তার মানে $N\left(x_n, \frac{1}{n}\right)$-দের বৈশিষ্ট্য হল ওদের কাউকেই আমাদের open cover-এর একটা ছাতা দিয়ে চাপা দেওয়া যায় না। আমাদের কাজ হল একটা contradiction বার করা। তার জন্য আমরা কায়দা করে এরকম একটা $N\left(x_n, \frac{1}{n}\right)$-কে একখানা ছাতার তলায় পুরে ফেলব।

> Since (X,d) is sequentially compact, the sequence $\{x_n\}_n$ must have a convergent subsequence, $\{x_{n_k}\}_k$, say.
>
> Let $x_{n_k} \to L \in X$.
>
> Since $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ is a cover of X, hence $\exists\beta \in I \quad L \in A_\beta$.
>
> Since A_β is open in X, hence $\exists\epsilon > 0 \quad N(L,\epsilon) \subseteq A_\beta$.

এই A_β-ই হল আমাদের চাপানোর ছাতা। ওটাই কোনো একটা যথেষ্ট ছোট্টো $N\left(x_n, \frac{1}{n}\right)$-র ঘাড়ে চাপাতে হবে। আমরা জানি x_{n_k}-রা L-এর দিকে আসছে, সুতরাং এক সময়ে আমাদের ছাতার তলায় চলে আসবে। কিন্তু খালি x_{n_k} এলেই হবে না, পুরো $N\left(x_{n_k}, \frac{1}{n_k}\right)$-কেই আমাদের ছাতার তলায় চাপা পড়তে হবে, তার জন্য $\frac{1}{n_k}$-কেও যথেষ্ট ছোটো হতে হবে।

Since $x_{n_k} \to L$, hence

$$\exists K_1 \in \mathbb{N} \quad \forall k \geq K_1 \quad x_{n_k} \in N\left(L, \tfrac{\epsilon}{2}\right).$$

Since $n_k \to \infty$ as $k \to \infty$, hence

$$\exists K_2 \in \mathbb{N} \quad \forall k \geq K_2 \quad \frac{1}{n_k} < \frac{\epsilon}{2}.$$

এর মধ্যে প্রথম শর্তটা গ্যারান্টি দিচ্ছে যে x_{n_k}-টা L-এর যথেষ্ট কাছে, আর দ্বিতীয় শর্তটা গ্যারান্টি দিচ্ছে যে $\frac{1}{n_k}$-টা যথেষ্ট ছোটো। এই দুটো গ্যারান্টিই আমরা একই সঙ্গে চাই। তাই--

Let $K = \max\{K_1, K_2\}$.
Then $N\left(x_{n_K}, \frac{1}{n_K}\right) \subseteq N(L, \epsilon) \subseteq A_\beta (\Rightarrow\Leftarrow)$.

[Q.E.D]

এই জোরালো theorem-টা দিয়ে এবার আমরা অনায়াসেই দেখাতে পারব যে, যেকোনো sequentially compact metric space-ই অবশ্যই compact হতে বাধ্য--

Exercise 11: Prove that any sequentially compact metric space must be compact.
HINT: কী করে এগোতে হবে ধরিয়ে দিচ্ছি, গুছিয়ে লেখার দায়িত্ব তোমার। প্রথমে শুরু করো যেকোনো একটা open cover নিয়ে, $\{A_\alpha \ : \ \alpha \in I\}$. আমরা এর একটা finite subcover বার করব। গোড়াতেই এই open cover-টার জন্য একটা Lebesgue number বার করে রাখো, ধরো $\delta > 0$. যদি open cover-টা হত $\{N(x,\delta) \ : \ x \in X\}$, তবে তো তুমি Example 12 থেকে জানোই কী করে তার finite subcover বার করতে হয় (সবাই সমান radius-এর ball হলে একটা "ফাঁক ফাঁক" sequence পাওয়া যাচ্ছিল, মনে পড়েছে?)। ধরো এরকম একটা finite subcover হল

$$\{N(x_1,\delta), N(x_2,\delta), ..., N(x_n,\delta)\}.$$

যেহেতু δ হল $\{A_\alpha \ : \ \alpha \in I\}$-র একটা Lebesgue number, তাই এমন $\alpha_1, ..., \alpha_n \in I$ পাবে, যাতে $N(x_i,\delta) \subseteq A_{\alpha_i}$ হয়। তার মানে

$$X \subseteq \cup_1^n N(x_i,\delta) \subseteq \cup_1^n A_{\alpha_i}.$$

ব্যস, তার মানে $\{A_{\alpha_1}, ..., A_{\alpha_n}\}$ হল একটা finite subcover, ঠিক যেমনটা দরকার ছিল।
এবার সবটা সুন্দর করে গুছিয়ে লিখে ফেলো দেখি!
■

আমরা আগেই দেখেছিলাম যে একটা metric space যদি compact হয়, তবে তার মধ্যে যেকোনো infinite sequence-এরই অন্ততঃ একটা convergent subsequence থাকে, অর্থাৎ কিনা metric space-টা sequentially compact-ও হয়। এখন দেখলাম যে তার উল্টো দিকটাও সত্যি। তার মানে পেয়ে যাচ্ছি নীচের theorem-টা--

THEOREM

A metric space is compact if and only if it is sequentially compact.

DAY 31
অন্যান্য ধর্ম (part 2)

31.1 আরো উল্টো প্যাঁচ

31.1.1 সব infinite set-এর limit point থাকলে...

আমরা আগে দেখেছি যে, একটা compact metric space-এর মধ্যে যে কোনো infinite set-এরই অন্ততঃ একটা limit point থাকে। এর "উল্টো"-টাও কি সত্যি? অর্থাৎ, যদি কোনো metric space এমন হয় যেখানে সব infinite set-এরই অন্ততঃ একটা limit point পাওয়া যাচ্ছে, তবে কি সেই metric space-টা compact হতে বাধ্য? উত্তর হল হ্যাঁ। সবটা গুছিয়ে লেখার জন্য **limit point compact** বলে একটা ধারণা[3] কাজে দেবে--

> DEFINITION: **Limit point compact**
> A metric space is called **limit point compact** if each infinite subset in it has a limit point.

এই সংজ্ঞাটা ব্যবহার করলে Bolzanno-Weierstrass theorem-এর বক্তব্য দাঁড়ায়--

> একটা compact metric space অবশ্যই limit point compact হতে বাধ্য।

আবার এর উল্টোদিকটাও সত্য। অতএব--

> THEOREM
>
> A metric space is compact if and only if it is limit point compact.

এটার প্রমাণটা পুরোটা করে দেব না। মূল ধারণাটা বলছি, সেখান থেকে নিজেই করে নিতে পারবে। একটা দিক আমরা আগেই প্রমাণ করেছি--compact হলে limit point compact হতে বাধ্য। চাইলে উল্টো দিকটা গতকালের sequentially compact-এর theorem-টার মত করে প্রমাণ করতে পারো। কিন্তু যেহেতু আমরা সেই theorem-টা কষ্ট করে একবার প্রমাণ করেই ফেলেছি, তাই সেই theorem-টাকে ব্যবহার করে এই প্রমাণটা অনেক সহজে করে ফেলতে পারব। তার জন্য একটা ব্যাপার লক্ষ করলেই হবে। যদি কোনো metric space দেওয়া থাকে যেটা limit point compact, তবে সেটা অতি অবশ্যই sequentially compact হতেও বাধ্য। ব্যস, এবার আগের theorem-টা লাগালেই হল!
Limit point compact হলে কেন sequentially compact হবে, সেটা নীচের অংকে দেখাতে বলেছে।

Example 13: Show that any limit point compact metric space must be sequentially compact.

SOLUTION:

> Let (X, d) be limit point compact.
> Shall show that it is sequentially compact.

তার মানে যেকোনো একটা infinite sequence নিয়ে দেখাতে হবে যে তার মধ্যে একটা convergent subsequence আছে।

---
[3]CBCS সিলেবাসে কিন্তু limit point compact শব্দটার উল্লেখ নেই। যারা সিলেবাসের বাইরে যেতে চাও না, তারা এই জায়গাটা বাদ দিতে পারো।

> Take any sequence $\{x_n\}_n \subseteq X$.

যেকোনো sequence-এর পেছনেই তার term-এর value-গুলোর একটা set থাকে, যেমন যদি $-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$ নাও, তবে set-টা হবে স্রেফ $\{-1, 1\}$. আমাদের $\{x_n\}_n$-এর পিছনে কী set আছে দেখি--

> Consider the set $A = \{x_n \ : \ n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$.

এবার দুটো কেস হবে--

> <u>Case 1: A is finite:</u> Then at least one element of A must occur infinitely many times in the sequence $\{x_n\}_n$. These terms make a convergent subsequence, as required.
> <u>Case 2: A is infinite:</u> Then by limit point compactness, A has a limit point $L \in X$.

আমরা এবার দেখাবো যে $\{x_n\}_n$-এর কোনো একটা subsequence এই L-এ গিয়ে converge করবে। মনে রেখো, L-কে ঘিরে যত ছোটো deleted neighbourhood-ই নাও না কেন, তার মধ্যে একটা না একটা x_n থাকতে বাধ্য। সেই জিনিসটাই আমরা বার বার ব্যবহার করব। একটা x_n নেব, তারপর neighbourhood-টাকে আরেকটু ছোটো করে আরেকটা x_n নেব, তারপর neighbourhood-টাকে আরো ছোটো করে আনব, এইরকম।

> Since $N'(L, 1) \cap A \neq \phi$, we can pick some $x_{n_1} \in N'(L, 1)$.
> Let $A_1 = A \setminus \{x_1, ..., x_{n_1}\}$.

আমরা জানি, কোনো set-এর থেকে finite-সংখ্যক সদস্যকে বাদ দিলে limit point-রা একই থাকে। সেইটা এবার কাজে লাগবে।

> Since A and A_1 differ by only finitely many elements, hence L is also a limit point of A_1.
> Since $N'\left(L, \frac{1}{2}\right) \cap A_1 \neq \phi$, we can pick some $x_{n_2} \in N'\left(L, \frac{1}{2}\right)$ with $n_2 > n_1$.
> Let $A_2 = A \setminus \{x_1, ..., x_{n_2}\}$.
> Since A and A_2 differ by only finitely many elements, hence L is also a limit point of A_2.
> Continuing like this, we get a sequence $\{x_{n_k}\}_k$, where for each $k \in \mathbb{N}$ $x_{n_k} \in N'\left(L, \frac{1}{k}\right)$ with $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$.
> This gives a subsequence $\{x_{n_k}\}_n$ converging to $L(\Rightarrow\Leftarrow)$.

■

31.1.2 সব continuous function-ই যদি bounded হয়...

আমরা দেখেছি যে, একটা compact metric space থেকে $\mathbb{R}$-এ যদি কোনো continuous function নাও, তবে সেটা bounded হতে বাধ্য। এটাকে "উল্টে" নীচের প্রশ্নটা পাওয়া যায়--

> একটা metric space যদি এমন হয় যে, তার উপরে যাই real valued continuous function নাও না কেন, সেটা bounded হয়, তবে কি metric space-টা compact হতে বাধ্য?

উত্তর হল--হ্যাঁ। প্রথমে একটা সহজ উদাহরণের ক্ষেত্রে সেটা প্রমাণ করে নেওয়া যাক।

Exercise 12: ধরো $X \subseteq \mathbb{R}$ নিলাম, Euclidean metric. বলা আছে যে, যাই continuous function নাও না কেন $f : X \to \mathbb{R}$, সেটা bounded হবেই। দেখাও যে, X অবশ্যই compact হবে।
HINT:
যেহেতু $X \subseteq \mathbb{R}$, তাই compact দেখানোর জন্য closed and bounded দেখালেই হবে। ধরো closed নয়। তাহলে আমরা একটা contradiction বার করব। তার জন্য এমন একটা continuous function তৈরী করব, যেটা unbounded হয়ে যাবে। যেহেতু closed নয় ধরে নিয়েছি, তার মানে অন্ততঃ একটা limit point রয়েছে X-এর বাইরে, ধরো L. আমরা এমনভাবে function-টা নেব, যাতে L-এর দিকে যতই এগোবে, ততই function-টা লাগামছাড়াভাবে বাড়তে থাকবে, যেমন ধরো $f(x) = \frac{1}{x-L}$. এর continuity নিয়ে কোনো সন্দেহ নেই, কারণ L তো আর X-এর মধ্যে নেই! অথচ, দেখাই যাচ্ছে যে f-টা unbounded. এই contradiction থেকেই বলা যাচ্ছে যে X-কে closed হতে হবে।
এবার ধরো X-টা bounded নয়। তাহলেও এরকম function বানানো যাবে। আসলে এক্ষেত্রে এরকম function বানানো খুবই সহজ... বলে দেব না, নিজে নিজে চেষ্টা করো। না পারলে উত্তর দেখে নিও। ■

এই অংকটা সহজে নামিয়ে দেওয়া গেল, কারণ compact-র বদলে closed and bounded দেখানোই যথেষ্ট ছিল। এবার general case-টা দেখব নীচের অংকে। আগেভাগেই সাবধান করে দিচ্ছি, বেশ খানিকটা জটিলতা আছে, তবে ছবি দিয়ে ভাবতে মন্দ না। অবশ্য বইটা প্রথমবার পড়বার সময়ে এই অংকটা বাদ দিয়ে যাওয়াই ভালো। তাতে বইয়ের বাকি অংশ পড়তে কোনো অসুবিধা হবে না। সুতরাং দুর্বলচিত্ত পাঠকপাঠিকারা এখান থেকেই এক লাফে পরের অধ্যায়ে চলে যেতে পারো।

Example 14: Let (X, d) be a metric space such that every real valued continuous function defined on it is bounded. Then show that (X, d) must be compact.
SOLUTION: ছবি দিয়ে ভাবার সময়ে মনে করে নাও X যেন $\mathbb{R}^2$-র অংশ, মানে কাগজের পাতায় এঁকে ফেলা যায়। প্রমাণটা অবশ্য general-ই থাকবে। প্রমাণটা হবে contradiction দিয়ে। তাই (X, d)-কে compact নয় ধরে শুরু করব।

> Let, if possible, (X, d) be not compact.

তাই এমন একটা sequence পাবে, যার কোনো convergent subsequence নেই।

> So there must be a sequence $\{x_n\}_n \subseteq X$ without any convergent subsequence.

এই sequence-টাকে কাজে লাগিয়ে আমরা একটা continuous কিন্তু unbounded function বানিয়ে ফেলব, এবং সেটাই হবে আমাদের contradiction. কাজটা ধাপে ধাপে করব।
প্রথম ধাপে আমরা sequence-টাকে দলাইমলাই করে খানিকটা ভদ্র করে নেব। লক্ষ করো, sequence-টার মধ্যে কোনো সংখ্যাই infinite-বার আসতে পারে না (কোনো সংখ্যা infinite-বার এলে ওরা মিলে একটা convergent subsequence হয়ে যেত)। অবশ্য তা বলে প্রতিটা সংখ্যাই যে একদম একবারই আসবে তার গ্যারান্টী নেই। কিন্তু আমরা সেটা ধরে নিতে পারি, কারণ যদি কোনো সংখ্যা একাধিকবারও আসে, তবে খালি প্রতিটা সংখ্যা যখন প্রথম আসছে খালি সেগুলোকে রাখলেই চলবে। যেমন, যদি sequence-টা হয়

$$\mathbf{2}, 2, \mathbf{3}, 2, \mathbf{4}, \mathbf{50}, 3, 3, \mathbf{6}, ...,$$

তবে আমরা রাখবো খালি মোটা সংখ্যাগুলোকে। এর ফলে যে নতুন sequence-টা পাবো, সেটা নিয়ে কাজ করলেই হল। এই কথাটাই প্রথম গুছিয়ে লিখে নেব।

<u>Step 1</u>: W.l.g., the sequence has distinct terms.

⟦ <u>Because:</u>

No convergent subsequence $\implies$ no number repeats infinitely many times.
We can keep only the first occurrence of each number.

⟧

এই গেল দলাইমলাই পর্ব। এবার function তৈরী করা শুরু করব। তার জন্য লক্ষ করো যে, যাই x_n নাও, এমন একটা $\delta_n > 0$ পাবে যাতে $N(x_n, \delta_n)$-এর মধ্যে sequence-টার অন্য কোনো term নেই, কারণ নইলে তো x_n-টাই কোনো একটা subsequence-এর limit হয়ে যেত।

<u>Step 2</u>: We note that $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists \delta_n > 0 \quad N(x_n, \delta_n)$ contains no term except x_n.

⟦ <u>Because:</u>

Otherwise, we shall get some x_n, to which a subsequence converges.

⟧

আমরা করব কি, প্রতিটা x_n-এ একটা cone (শংকু) বসাব। যদি X-কে $\mathbb{R}^2$ বলে ভাবো, তবে ব্যাপারটা অনেকটা Fig 24-এর মত দেখাবে। যে cone-টা x_n-এ বসাব, তার base-এর radius নেব $\frac{\delta_n}{4}$, আর উচ্চতা নেব n. ফলে সবটা মিলিয়ে মনে হবে যেন X-এর গায় ফোস্কা ফোস্কা মতন পড়েছে। এই জিনিসটা আসলে একটা function-এর গ্রাফ, $f : X \to \mathbb{R}$. ছবিতে তো $X = \mathbb{R}^2$ নিয়েছি, তাই $\mathbb{R}^2$-র কোনো বিন্দু p-তে $f(p)$ হল সেইখানকার উচ্চতা। যেমন $p = x_1$ হলে $f(p) = 1$. যতই p-টা x_1-এর থেকে দূরে সরে যাবে, $f(p)$-ও ততই নামতে নামতে এক সময়ে 0 হয়ে যাবে। ছবি দেখে আন্দাজ করতে পারছ যে f-টা continuous হবে, কারণ খালি ফোস্কাই পড়েছে, কেটে গিয়ে রক্ত তো পড়ছে না! আর unbounded হওয়া নিয়েও কোনো সংশয় নেই, কারণ cone-গুলোর উচ্চতা $1, 2, 3, \ldots$ করে ক্রমশঃ বেড়েই চলেছে।
এসবই আমরা ছবি দিয়ে ভাবলাম, যেখানে $X = \mathbb{R}^2$ নিয়েছি। এবার দেখি যেকোনো metric space-এই একই কায়দা কী করে করা যায়। তার জন্য $\mathbb{R}^2$-এর একটা cone-কে খুঁটিয়ে দেখা যাক (Fig 25)। Cone-টা ধরো x_n-এ বসানো। এর base হল $N\left(x_n, \frac{\delta_n}{4}\right)$. ছবিতে শেড করে দেখিয়েছি। এই জিনিসটার একটা নাম দিয়ে রাখি--

Let $B_n = N\left(x_n, \frac{\delta_n}{4}\right)$. By definition of δ_n, the B_n's are disjoint.

এখানে B_n-এর radius কেন $\frac{\delta_n}{4}$ নিলাম সেটা স্পষ্ট হবে খানিক পরে।

Fig 24

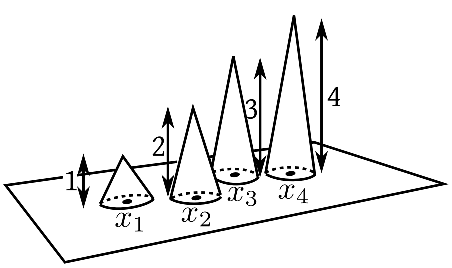
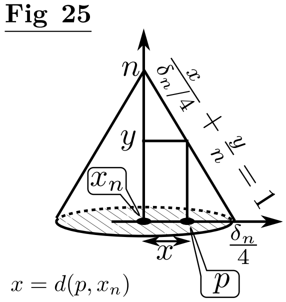


Fig 25



এই B_n-এর মধ্যে যেকোনো বিন্দু নাও p. যদি $x = d(p, x_n)$ নিই, তবে p-তে cone-টার হেলানো ছাদের উচ্চতা হল y, যেখানে

$$\frac{x}{\delta_n/4} + \frac{y}{n} = 1,$$

অর্থাৎ

$$y = n\left(1 - \frac{d(p, x_n)}{\delta_n/4}\right).$$

এই ফর্মুলাটা ভালো করে বুঝে নাও। এটা আমরা $\mathbb{R}^2$-এর উপর বসানো cone-এর ছবি দেখে বানালেও, এর মধ্যে কিন্তু $\mathbb{R}^2$-র কোনো ছাপ নেই, যেকোনো metric space-এই চলতে পারে। এর ভিত্তিতেই আমরা এই function-টা নেব--

> We define $f_n : X \to \mathbb{R}$ as
>
> $$f_n(p) = \begin{cases} n\left(1 - \frac{d(p,x_n)}{\delta_n/4}\right) & \text{if } p \in B_n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

এইটাই হল x_n-এ বসানো ফোস্কাটা। প্রতিটা x_n-এই এরকম ফোস্কা বসালে সব মিলিয়ে পাবে--

> We also define $f : X \to \mathbb{R}$ as
>
> $$f(p) = \begin{cases} f_n(p) & \text{if } p \in B_n \text{ for some } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$
>
> This is well-defined since B_n's are disjoint.

এই হল আমাদের সেই ব্রহ্মাস্ত্র function. এটার থেকে contradiction পাওয়ার জন্য দেখাতে হবে যে এটা continuous অথচ unbounded. এটা যে unbounded, সে তো বোঝাই যাচ্ছে--

> Step 3: Clearly, for each $n \in \mathbb{N}$ we have $f(x_n) = f_n(x_n) = n$.
> Since $\mathbb{N}$ is unbounded, hence f is unbounded.

কষ্টটা খালি হবে continuous দেখাতে।

> Step 4a: Shall show that f is continuous.

প্রথমে লক্ষ করো যে, প্রতিটা ফোস্কাই continuous, মানে প্রতিটা f_n-ই continuous.

> We note that each f_n is continuous.
>
> ⟦ Because:
>
> $d(p, x_n)$ is continuous in p.
> Also, as $d(p, x_n) \to \frac{\delta_n}{4}$, we have $f_n(p) \to 0$.
>
> ⟧

এবার ধরো তোমায় কোনো একটা $p \in X$ দিয়ে দেখাতে বললাম যে f-টা ওই p-তে continuous. যদি $p \in B_n$ হয়, তবে কাজটা তৎক্ষণাৎ হয়ে যাবে।

> Since $f \equiv f_n$ on the open set B_n, hence f is continuous on B_n.

এবার ধরো p-টা কোনো ফোস্কার মধ্যে নেই, মানে কোনো B_n-এর মধ্যেই নেই।

> Step 4b: We take any p outside all the B_n's.

তুমি হয়তো মহানন্দে বলে উঠবে, তবে তো এক্কেবারেই সোজা, কারণ B_n-দের বাইরে তো f-টা একেবারে ফুটবলের মাঠ, সর্বত্রই 0. সুতরাং continuous দেখাতে কষ্ট হবে কেন? কষ্ট হবে, কারণ এখানে একটা সমস্যা আছে। সমস্যাটা হল তোমার p-কে ঘিরে যদি একটা neighbourhood নাও, তবে সেটা পুরোটাই ফুটবল মাঠ হবে সেটা কী করে বলছ? তার মধ্যে যদি খানিকটা করে কয়েকটা ফোস্কার পাশগুলো ঢুকে পড়ে?
আমরা প্রথমে দেখাব যে, neighbourhood-টাকে যথেষ্ট ছোটো নিলে তার মধ্যে বড়োজোর একটা ফোস্কার পাশটা এসে যেতে পারে, তার বেশী কিছু হতে পারে না। এই জায়গাটাই জটিল, ধীরে ধীরে পড়।
যেহেতু আমাদের sequence-টার কোনো convergent subsequence ছিল না, তাই p-কে ঘিরে এমন একটা $N(x, \epsilon)$ পাবে, যার মধ্যে sequence-টার কোনো term নেই।

> We know that $\{x_n\}_n$ has no subsequential limit. In particular, p is not a subsequential limit. Hence
>
> $$\exists \epsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \notin N(p, \epsilon).$$
>
> Let $B = N\left(p, \frac{\epsilon}{2}\right)$.

এই B-টাই হল আমাদের p-এর সেই "যথেষ্ট ছোটো" neighbourhood, যার মধ্যে কোনোভাবেই একাধিক ফোস্কা এসে পড়তে পারে না। হয় একটাও ফোস্কা নেই, একেবারে সমতল (Fig 26-এর মত), নয়তো বড়োজোর একটা ফোস্কার পাশটা এসে যেতে পারে (Fig 27)। কিন্তু Fig 28-এর মত একাধিক ফোস্কা কখনওই হতে পারে না।
প্রমাণটা হবে contradiction দিয়ে--ধরো কোনোভাবে Fig 28-এর মত করে দুটো ফোস্কার খানিকটা B-এর মধ্যে ঢুকে পড়েছে, মানে--

> Step 4c: Let, if possible, there exist $m \neq n$ with $B \cap B_m \neq \phi$ and $B \cap B_n \neq \phi$.
>
> W.l.g., $\delta_m \leq \delta_n$.

এখন B_m আর B_n-এর কেন্দ্র রয়েছে যথাক্রমে x_m আর x_n-এ। ওদের মধ্যে দূরত্বটা হল $d(x_m, x_n)$. লক্ষ করো--

> Now $d(x_m, x_n) \geq \delta_n$.

কারণ x_n-এর $< \delta_n$ দূরত্বের মধ্যে x_m থাকতে পারে না।

Fig 26

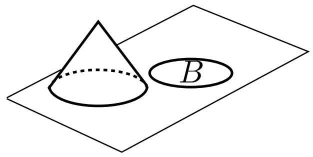


Fig 27

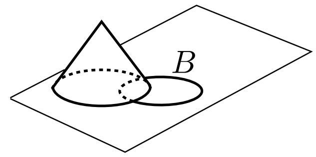
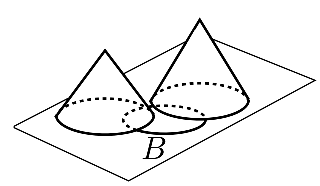


Fig 28



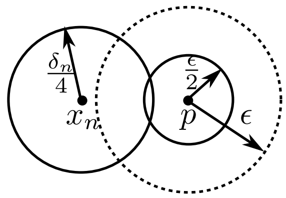


Fig 29

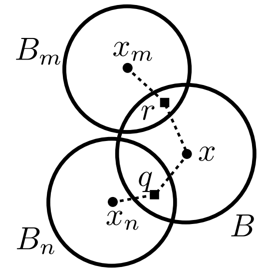


Fig 30

Also $\epsilon < \frac{\delta_n}{2}$.

এইটা কেন হচ্ছে সেটা চট্ করে বোঝা মুশকিল। Fig 29-এর দিকে চোখ রেখে নীচের যুক্তিটা পড়--

⟦ Because:

$\because x_n \notin N(p,\epsilon),\ \therefore \epsilon \leq d(x_n,p)$.
Again, since $B \cap B_n \neq \phi,\ \therefore d(x_n,p) < \frac{\delta_n}{4} + \frac{\epsilon}{2}$.
Combining, $\epsilon < \frac{\delta_n}{4} + \frac{\epsilon}{2}$, or $\frac{e}{p}silon2 < \frac{\delta_n}{4}$.

⟧

এইবার একটা triangle inequality লাগাব। Fig 30 দ্যাখো।

We pick some $r \in B \cap B_m$ and $q \in B \cap B_n$.

আমরা x_m থেকে x_n-এ যাব, ড্যাশ্ ড্যাশ্ পথ ধরে। তাহলে--

By triangle inequality,

$$d(x_m,x_n) \leq \underbrace{d(x_m,r)}_{<\frac{\delta_m}{4}} + \underbrace{d(r,x)}_{<\frac{\epsilon}{2}} + \underbrace{d(x,q)}_{<\frac{\epsilon}{2}} + \underbrace{d(q,x_n)}_{<\frac{\delta_n}{4}} < \frac{\delta_n}{4} + \frac{\delta_n}{4} + \frac{\delta_n}{4} + \frac{\delta_n}{4} = \delta_n.$$

অথচ এক্ষুণি আমরা দেখলাম যে $d(x_m,x_n) \geq \delta_n$ হবে--

But we have seen $d(x_m,x_n) \geq \delta_n (\Rightarrow\Leftarrow)$.

ব্যস্ contradiction! তার মানে প্রমাণটা কি শেষ হয়ে গেল? না, এতে খালি প্রমাণ হল যে B-এর গায় একাধিক ফোস্কা থাকতে পারে না। অবশ্য অংকটাও প্রায় শেষ হয়ে এসেছে--

Step 4d: If B is disjoint from all the B_n's then $f \equiv 0$ on the open set B, and so f is continuous there.
If $B \cap B_n \neq \phi$, then $f \equiv f_n$ over B, and so f is continuous there.
Thus, $f : X \to \mathbb{R}$ is unbounded and continuous $(\Rightarrow\Leftarrow)$.

▮

যাক, প্রমাণ শেষ, স্বস্তির নিঃশ্বাস, এবং অবসন্ন দেহে মাথা ঘুরে পতন! ■

Answers

1. (*i*) Closed, not bounded. (*ii*) Closed and bounded. (*iii*) Closed, not bounded. (*iv*) Closed and bounded. (*v*) Closed, not bounded. (*vi*) Not closed, but bounded. (*vii*) Closed and bounded.

2. $\left\{1-\frac{1}{n} \;:\; n\in\mathbb{N}\right\}$. **3.** $A=(0,1]$ এবং $f(x)=\frac{1}{x}$. **4.** না, তার জন্য এই গ্যারান্টীটা দরকার যে যেকোনো open cover-এর জন্যই finite subcover পাওয়া যাবে। **5.** হ্যাঁ। **6.** অসম্ভব। **7.** অবশ্যই আছে, ঠিক একটাই আছে, সেটা হল cover-টা নিজেই। যেকোনো set-ই যেমন তার নিজের subset, তেমনি যেকোনো cover-ই তার নিজের একটা subcover. **10.** (R, Euclidean) আমরা জানি complete, কিন্তু compact নয় মোটেই।
12. $f(x)=x$ নিলেই হবে।

Chapter VII
Fixed point theorem

DAY 32
Fixed point

32.1 কী জিনিস?

ছিল একটা ডিম, হয়ে গেল দিব্যি একটা প্যাঁকপেঁকে হাঁস। এ তো হামেশাই হচ্ছে।

--হ য ব র ল (সুকুমার রায়)

একটা সংখ্যাকে যদি square করো, তবে সংখ্যাটা বদলে যাবে। এতে আর আশ্চর্যের কী আছে? যেমন 2-কে square করলে হয়ে যাবে 4, আবার 100-কে square করলে 10000. কিন্তু এমন কোনো সংখ্যা দিতে পারো, যাকে square করলেও বদলায় না? অতি সহজ উত্তর হল, 1. কারণ $1^2 = 1$. এরকম আর কোনো সংখ্যা আছে? সেটা বার করা মানে সেইসব যাবতীয় $x \in \mathbb{R}$ খুঁজে বার করা যাতে $x^2 = x$ হয়, মানে $x^2 - x = 0$ হয়, অর্থাৎ $x(x-1) = 0$ হয়। এরকম খালি দুটোই সংখ্যা সম্ভব, $x = 0$ আর $x = 1$. আমরা বলব যে এই দুটো সংখ্যা হল $f(x) = x^2$-এর **fixed point**. সংজ্ঞাটা এইরকম--

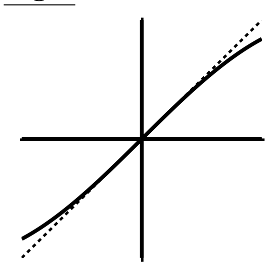
DEFINITION: Fixed point

A number x_0 is called a **fixed point** of a function $f(x)$ if $f(x_0) = x_0$.

এই ধারণাটা অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ। কিন্তু সেই গুরুত্ব আলোচনার আগে কয়েকটা উদাহরণ করে গা গরম করা যাক।

Example 1: বলতে হবে $\sin x$-এর কোনো fixed point আছে কিনা। থাকলে যাবতীয় fixed point বার করো।

Fig 1



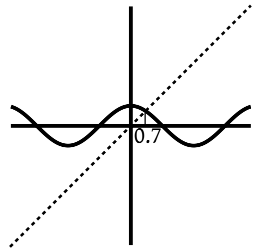


Fig 2

SOLUTION: একটা উত্তর একটু চিন্তা করলেই পেয়ে যাওয়া উচিত। সেটা হল $x = 0$, কারণ $\sin 0 = 0$. আর কোনো fixed point কি আছে? মানে আমরা $\sin x = x$-এর যাবতীয় সমাধান চাইছি। যেহেতু $|\sin x| \leq 1$ হয়, তাই $[-1, 1]$-এর বাইরে সমাধান খুঁজে লাভ নেই। যদি $x \in [-1, 1]$ হয়, তবে $\sin x$-এর গ্রাফটা হবে Fig 1-এর মত। Fixed point বার করার সুবিধার জন্য এর উপর x-এর গ্রাফটাও এঁকে দিয়েছি (মানে $45°$-তে হেলানো ড্যাশ্ ড্যাশ্ লাইনটা)। $\sin x = x$ হওয়া মানে $\sin x$-এর গ্রাফ আর x-এর গ্রাফের ছেদবিন্দু। গ্রাফদুটো ঠিক একটা বিন্দুতেই ছেদ করেছে, এবং সেটা হল $x = 0$-তে[1]। তার মানে ওটাই $\sin x$-এর একমাত্র fixed point. ■

আমরা এই অংকে যেভাবে গ্রাফ দিয়ে ভাবলাম, সেটা fixed point নিয়ে অংক করার সময়ে খুবই কাজ আসে। অনেক সময়েই কোনো $f(x)$ দেওয়া থাকলে তার আদৌ কোনো fixed point আছে কিনা সেটা বার করা বেশ কঠিন হয়, আর থাকলেও সেগুলোকে বার করা সাধারণতঃ আরও কঠিন হয়। কিন্তু গ্রাফ দিয়ে ভাবলে কাজটা কিছুটা সহজ। একটা উদাহরণ দিই।

Example 2: প্রথমে আন্দাজ করার চেষ্টা করো তো $\cos x$-এর কী কী fixed point আছে। তারপর গ্রাফ দিয়ে ভেবে বলো।

SOLUTION: তোমার খবর জানি না, কিন্তু আমার তো মাথায় চট্ করে কোনো আন্দাজ আসছে না। চেষ্টা করে দ্যাখো, x-এর যেসব পরিচিত value-র জন্য $\cos x$ জানা আছে (যেমন $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ ইত্যাদি), তাদের কেউই fixed point হচ্ছে না।
এবার Fig 2-এর মত গ্রাফ দিয়ে ভাবা যাক। মুহূর্তের মধ্যে বোঝা যাচ্ছে যে, একটা fixed point আছে, এবং ঠিক একটাই আছে। সেটা 0.7-এর কাছাকাছি কোথাও। ■

এই অংকের সমাধানটা অবশ্য অসম্পূর্ণ রয়ে গেল। আমাদের কাজ ছিল যাবতীয় fixed point বার করা। আমরা দেখলাম যে একটাই fixed point আছে, কিন্তু তার value-টা খালি "0.7-এর কাছাকাছি কোথাও" বলেই ছেড়ে দিলাম, পুরোপুরি বার করলাম না। এর পিছনে একটা কারণ আছে, আসলে এই fixed point-টাকে সহজে প্রকাশ করার কোনো পথ নেই! ওটা কোনো rational সংখ্যা নয় যে $\frac{p}{q}$ আকারে লিখে দেব, বা $\sqrt{2}$ কিংবা $\sqrt{3}$ জাতীয় ভদ্রসভ্য জাতীয় কিছুও নয় যে সংক্ষেপে প্রকাশ করা যাবে। অবশ্য π কিংবা e-এর বেলাতেও একই কথা বলা চলে, কিন্তু ওরা অংকের দুনিয়ায় বহুলব্যবহৃত, তাই ওদের আলাদা করে নাম দেওয়া হয়েছে। আমাদের সংখ্যাটার কোনো প্রচলিত নাম নেই, এবং π বা e দিয়েও ওকে সহজে প্রকাশ করা যায় বলে জানি না! তাহলে উপায়? উপায় হল দশমিকে লেখা। তবে rational সংখ্যা তো নয়, যে দশমিকটা পুরো লিখে ফেলা যাবে (নিদেনপক্ষে অন্ততঃ রেকারিং ব্যবহার করে)। তবে যদি অনেকগুলো দশমিক ঘর বার করতে পারি, তবে যথেষ্ট সূক্ষ্মভাবে প্রকাশ করা যাবে। এবং সেই কাজটা করতে একটু ম্যাজিক লাগবে। এমন ম্যাজিক, যেটা বিজ্ঞানের দুনিয়াকে বদলে দিয়েছে। সাংঘাতিক সূক্ষ্ম nanotechnology-ই বল, আর NASA-র মহাকাশচর্চাই বলো, এই ম্যাজিকটা ছাড়া সবই অচল হয়ে পড়ত। এবার সেটাই আমরা শিখব।

32.2 Fixed point-এর ম্যাজিক

শুধু একটা নয়, দুটো ম্যাজিকের কথা বলব এখানে। প্রথমটার উপর নির্ভর করে বর্তমানের বিজ্ঞানের দুনিয়া দাঁড়িয়ে আছে।

[1]অবশ্য ছবিতে মনে হচ্ছে যেন 0-র দুদিকেই খানিকটা পর্যন্ত গ্রাফদুটো একেবারে একাকার হয়ে আছে।

সেই ম্যাজিকটা একেবারে আলাদীনের প্রদীপের মত ম্যাজিক। আর দ্বিতীয় ম্যাজিকটা হল ঘরোয়া ম্যাজিক, যেরকম ম্যাজিক আমরা জলসা-টলসায় দেখে থাকি, যদিও তার সঙ্গে গভীর অংক জড়িত।

32.2.1 প্রথম ম্যাজিক: fixed point iteration

একটু আগে যে অংকটা cos-ছিলাম (মানে, কষছিলাম) সেটা দিয়েই শুরু করি।

Example 3: সমাধান করো, $\cos x = x$.

SOLUTION: ছোটোবেলায় স্কুলে যতরকম equation solve করার বিদ্যে শিখেছ, সব খাটিয়ে দেখতে পারো, কোনো লাভ হবে না। খালি একা x-কে বাঁদিকে আর ডানদিকে সব x-ছাড়া জিনিস কোনোভাবেই আনতে পারবে না। এবার ম্যাজিক কায়দাটা বলি। তার জন্য একটা ক্যালকুলেটার লাগবে, যা দিয়ে কোনো x দেওয়া থাকলে $\cos x$ বার করা যায়[2]। আমরা গ্রাফ থেকেই আন্দাজ করেছিলাম যে, উত্তরটা 0.7-এর কাছাকাছি কোথাও। সেই আন্দাজটাকে নাম দেব $x_0 = 0.7$. এটা আমাদের 0 নম্বর আন্দাজ, কোনো ক্যালকুলেটার চালানোর আগেই। ক্যালকুলেটার দিয়ে $\cos x_0$ বার করো। যদি $\cos x_0$-টা x_0-এর সমান হত, তবে গল্প এখানেই শেষ হয়ে যেত। কিন্তু আসলে তো আর $\cos 0.7$ মোটেই 0.7 নয়, ওটা হল 0.765. আমি উত্তরটা তিন দশমিক ঘর অবধি দিলাম এখানে, যদিও ক্যালকুলেটারে আরো অনেক ঘর অবধি দেবে। এটাকে x_1 নাম দাও, কারণ একবার ক্যালকুলেটার চালানোর পর পাওয়া গেছে এটাকে। এবার আবার ক্যালকুলেটার চালিয়ে $\cos x_1$ বার করো, এবং তার নাম দাও x_2. মানে $x_2 = \cos x_1 = 0.721$. এইভাবে চালাতে থাকো, $x_n = \cos x_{n-1}$, যেখানে $n = 1, 2, 3, ...$ আমি যা পেয়েছি তা হল--

n	0	1	2	3	4	5	6	7
x_n	0.7	0.765	0.721	0.751	0.731	0.744	0.735	0.742

n	8	9	10	11	12	13	14	15	16
x_n	0.737	0.740	0.738	0.740	0.739	0.739	0.739	0.739	0.739

লক্ষ করো x_n-গুলো শেষের দিকে 0.739-এই স্থির হয়ে গেছে। এ থেকে আমরা সিদ্ধান্ত করব যে, উত্তরটা হচ্ছে $0.739...$। ■

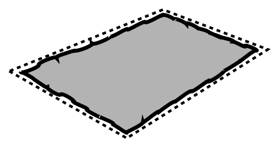
এখানে অবশ্য বেশ কয়েকটা প্রশ্ন ওঠে--

- x_n-গুলো শেষের দিকে সবাই 0.739 আসছিল (তিন ঘর পর্যন্ত)। তা থেকেই কী করে সিদ্ধান্ত করলাম যে সঠিক উত্তরটা $0.739...$ হবে?
- তিন ঘর অব্ধি উত্তর পেতেই যদি এতবার ক্যালকুলেটার চালাতে হল, তবে আরো বেশী সূক্ষ্ম উত্তর পেতে হলে কতবার চালাতে হবে?
- আমরা গোড়ায় $x_0 = 0.7$ নিয়ে শুরু করেছিলাম। অন্য কিছু নিয়ে শুরু করলেও কি একই উত্তর পেতাম?

এই সব প্রশ্নেরই সদুত্তর আছে, এবং আমরা সেসব এই অধ্যায়েই শিখব একটু পরে। আপাততঃ মূল জিনিসটা বলে রাখি। আসলে আমরা এইভাবে একটা sequence তৈরী করছি $\{x_n\}_n$, যেখানে $x_n = \cos x_{n-1}$. দেখানো যাবে যে, যাই x_0 নিয়ে শুরু করো না কেন, সর্বদাই এই sequence-টা কোনো $L \in \mathbb{R}$-এ converge করতে বাধ্য, এই L-টা x_0-এর উপরে নির্ভর করবে না, এবং $\cos L = L$ হবে (প্রমাণটা মোটেই জটিল নয়!)। যদি x_0-টা L-এর অনেক দূরে নিয়ে শুরু করো, তবে L-এর কাছে পৌঁছতে অনেক সময় লাগবে, এই যা কষ্ট!

এবার বলি বিজ্ঞানের দুনিয়া কেন এই কায়দাটার উপর দাঁড়িয়ে আছে। বিজ্ঞানের মূল কাজই হল বিভিন্ন জিনিসের মধ্যে সম্পর্ক বার করা। এই সব সম্পর্ক ব্যবহার করে তৈরী নানারকম যন্ত্রের উপরেই আমাদের সভ্যতা দাঁড়িয়ে আছে। সেই সম্পর্কগুলোর ভিত্তিতেই এটা নির্ণয় করা যে যন্ত্রের output-টাকে ইচ্ছে মত পাওয়ার জন্য input-গুলোকে কীভাবে নিতে হবে। যেমন force-এর সঙ্গে acceleration-এর সম্পর্ক জানি, acceleration-এর সঙ্গে displacement-এর সম্পর্ক জানি। এবার কামান বানানোর সময়ে ঠিক করতে হবে শত্রুর দুর্গের দেওয়াল পর্যন্ত পৌঁছনোর জন্য ঠিক কতটা force লাগাতে হবে। কিংবা একটা

[2] সাবধান, এখানে কিন্তু x-টা radian-এ আছে, অনেক ক্যালকুলেটারে তার জন্য radian mode-এ যেতে হয়।



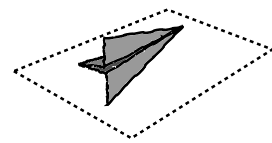


Fig 3 **Fig 4**

রকেটকে মহাশূন্যের বিশেষ কক্ষপথে ওঠাতে কতটা কী করতে হবে, কিংবা একটা বিশেষ শক্তিসম্পন্ন টেলিস্কোপ বানানোর জন্য একটা লেন্সের পিঠগুলো কতটা বাঁকা হতে হবে। এই সবেরই চাবীকাঠি হল equation সমাধান করা। বিজ্ঞানের বিভিন্ন শাখার নানা সূত্র থেকে equation-গুলো আসে। কিন্তু যদি সেগুলোকে সমাধান করে উত্তরই না বার করা গেল, তবে চারধারের এত সব আশ্চর্য আশ্চর্য যন্ত্রপাতি তৈরীই হত না। এইসব equation-গুলোর প্রায় কোনোটারই ভদ্রসভ্য উত্তর হয় না, তখন বাধ্য হয়েই এই ম্যাজিক কায়দাটার শরণাপন্ন হন বৈজ্ঞানিকেরা।

32.2.2 দ্বিতীয় ম্যাজিক: fixed point theorems

এবারের ম্যাজিকটা একেবারেই জন্মদিনের আসরে দেখানো ম্যাজিকের মত। অবশ্য জন্মদিনের ম্যাজিকের কায়দা সাধারণতঃ জন্মদিনের আসরেই সীমাবদ্ধ থাকে। কিন্তু John Nash নামের একজন বিজ্ঞানী এইরকম একটা ম্যাজিক কাজে লাগিয়ে এক সাড়া জাগানো আবিষ্কার করে ফেলেছিলেন, যা Nash equilibrium নামে বিখ্যাত হয়ে আছে। যাই হোক, আপাততঃ সাড়া জাগানোর কথা রেখে ম্যাজিকের কথাটা বলি। এটা অংকের ম্যাজিক, তাই হাতের কারসাজির কোনো ব্যাপার নেই। যা করার অংক নিজেই করবে, বস্তুতঃ অংকটাই এখানেই ম্যাজিসিয়ান, তুমি আমি দর্শকমাত্র। প্রথমে একটা কাগজের পৃষ্ঠা নিতে হবে। একটা বড়সড়ো চৌকো পৃষ্ঠা। সেটাকে টেবিলের উপর বিছিয়ে রেখে তার চারপাশে একটা আউটলাইন এঁকে নাও (Fig 3)। সুতরাং পৃষ্ঠাটার উপরে যেকোনো বিন্দু নিলে তার ঠিক নীচে আউটলাইনটার মধ্যে আরেকটা বিন্দু পাবে। এবার পৃষ্ঠাটাকে হাতে নিয়ে যেমন করে খুশি ভাঁজ করে ফের ওই আউটলাইনটার মধ্যে কায়দা করে রাখতে হবে। একটা উদাহরণ দেখিয়েছি Fig 4-এ। কাজটা করতে হবে দুটো শর্ত মেনে--

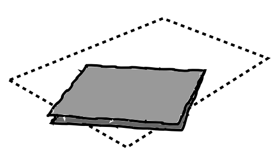
- এক, কাগজটার কোনো অংশ Fig 5-এর মত আউটলাইনের বাইরে চলে যেতে পারবে না।
- দুই, কাগজের প্রতিটা বিন্দুকেই খানিকটা হলেও স্থানচ্যুত করতে হবে, অর্থাৎ কোনো বিন্দুই যেন আউটলাইনটার মধ্যে তার corresponding বিন্দুর উপরে না থাকে।

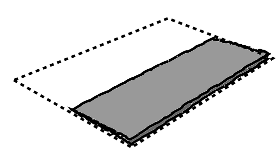
কাজটা যে সহজ নয়, সেটা কয়েকটা উদাহরণ দিলেই বুঝবে।

Example 4: ধরো কাগজটা রাখলে Fig 6-এর মত করে। তবে কী চলবে?

SOLUTION: না, ওতে নীচের অর্ধেকটার সব বিন্দুই যথাস্থানে থেকে যাচ্ছে। ■

Fig 5 **Fig 6**





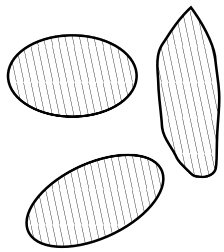


Fig 7

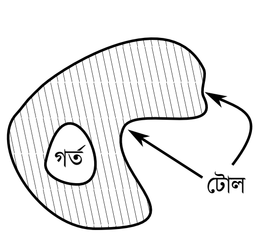


Fig 8

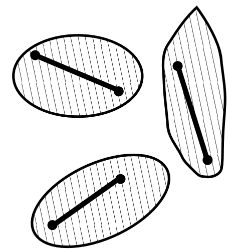


Fig 9

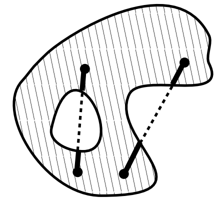


Fig 10

Example 5: যদি কাগজটাকে স্রেফ 180° ঘুরিয়ে বসাও তবে?

SOLUTION:একেবারে কেন্দ্রের বিন্দুটা যথাস্থানেই থেকে যাবে। ■

Example 6: কিন্তু যদি একেবারে এলোমেলো করে ভাঁজ করো, কিংবা দলামোচড়া করে একটা গোল্লা পাকিয়ে রাখো, তবে নিশ্চয়ই কোনো বিন্দুই আর যথাস্থানে থাকবে না?

SOLUTION: ম্যাজিক উত্তরটা এখানেই--তুমি যেভাবেই রাখো না কেন, যতই দুমড়ে মুচড়ে একাকার করো না কেন, যদি কাগজটা কোথাও ছিঁড়ে না যায়, এবং আউটলাইনের বাইরে বেরিয়ে না যায়, তবে অন্ততঃ একটা বিন্দু যথাস্থানে থাকতে বাধ্য। ■

এইটা একটা বিখ্যাত theorem. শুধু চৌকো পৃষ্ঠা বলেই নয়, অন্য আরো অনেক চেহারার পৃষ্ঠা নিলেও একই ব্যাপার হবে! কিছু উদাহরণ দেখিয়েছি Fig 7-এ। খালি খেয়াল রাখতে হবে যেন কাগজটায় কোনো গর্ত বা ঢুকে যাওয়া অংশ না থাকে (Fig 8)। অংকের ভাষায় Fig 7-এর মত আকারদের বলে **convex.** কোনো এমন একটা set, যাতে ওর মধ্যে যেকোনো দুটো বিন্দু দেওয়া থাকলে তুমি সরলরেখা বরাবর হেঁটে একটা থেকে অন্যটায় যেতে পারবে (Fig 9), তার জন্য কোথাও Fig 10-এর মত set-এর বাইরে পা রাখতে হবে না।
ভাঁজ করার সময়েও দুটো শর্ত পালিত হতে হবে--কোনো কাটাছেঁড়া চলবে না, আর যেরকম আকারের পৃষ্ঠাই নাও না কেন, প্রথমে সেটার যে আউটলাইন এঁকে নেবে, তার বাইরে বেরোনো চলবে না। অংকের ভাষায় বলার সময়ে অবশ্য আরো দুটো শর্তও লেখা হয়, যেগুলো একটা পৃষ্ঠার ক্ষেত্রে বলাই বাহুল্য--

- এক, পৃষ্ঠাটা যেন bounded হয় (দোকানে unbounded পৃষ্ঠা কিনতেই পাওয়া যায় না!)
- আর দুই, সেটা যেন একটা closed set হয়, মানে পৃষ্ঠাটার boundary-টাকেও পৃষ্ঠার অংশ ধরতে হবে।

অংকের ভাষায় theorem-টা লেখার আগে আরেকটা চমক তোমার জন্য অপেক্ষা করছে--আমরা এখানে কাগজের পৃষ্ঠা নিয়ে কাজ করছিলাম, মানে $\mathbb{R}^2$-এর অংশ। এই একই ব্যাপার কিন্তু যেকোনো $\mathbb{R}^n$-এই হবে!

Brouwer's fixed point theorem

Let A be any convex compact set in $\mathbb{R}^n$. Let $f : A \to A$ be any continuous function. Then

$$\exists x \in A \quad f(x) = x.$$

Theorem-টার বিষয়ে কয়েকটা কথা বলে নিই--

- এক, Brouwer-এর উচ্চারণ হল ব্রাওয়ার।
- এখানে compact কথাটা দেখে ঘাবড়িও না। যেহেতু আমরা ($\mathbb{R}^n$, Euclidean)-এর মধ্যে রয়েছি, তাই compact মানে হল closed and bounded.
- এখানে f-ই হল ভাঁজ করা। প্রথমে যে বিন্দুটা ছিল x-এ, ভাঁজ করার পরে তার অবস্থানকেই বলছি $f(x)$.
- কাগজ ভাঁজের উদাহরণে আমরা বলেছিলাম যে কাগজটাকে কোনোভাবেই ছেঁড়া চলবে না। সেইটাই অংকের ভাষায় প্রকাশ করা হয়েছে continuity শর্তের মাধ্যমে।
- আমরা আরো বলেছিলাম যে কাগজটা আউটলাইনের বাইরে গেলে চলবে না। অংকের ভাষায় সেটাই প্রকাশ করেছি $f : A \to A$ বলে, অর্থাৎ $x \in A$ নিলে $f(x)$-কেও A-র মধ্যেই থাকতে হবে।
- এখানে $f(x) = x$ মানে ভাঁজ করার পরও x বিন্দুটা একই অবস্থানে রইল।

একটু উদাহরণ দিয়ে $\mathbb{R}^3$-র কেসটা বোঝা যাক।

Example 7: ধরো এক কাপ চা আছে। কাপের যে অংশটা চা দিয়ে পূর্ণ সেটা $\mathbb{R}^3$-এর একটা subset, যার নাম দিলাম

A. এটা অবশ্যই bounded. আর boundary-টাও চায়ের মধ্যেই ধরলে, closed-ও বটে। এবার চামচ দিয়ে চা-টা ভালো করে নেড়ে দাও। এর ফলে চায়ের কণাগুলো ইতস্ততঃ ছড়িয়ে গেল নিশ্চয়ই। গোড়ায় যে কণাটা x অবস্থানে ছিল, তার বর্তমান অবস্থানকে বলব $f(x)$. তাহলে f অবশ্যই একটা continuous function হবে, কারণ চামচ দিয়ে নাড়লে চায়ের কণারা নড়াচড়া করে মাত্র, হঠাৎ ভোজবাজির মত এক জায়গা থেকে মিলিয়ে গিয়ে পরমুহূর্তেই অন্য জায়গায় হাজির হয় না। এবার তাহলে Brouwer's fixed point theorem বলছে যে, যতই নাড়ো না কেন চা-টা আবার যখন স্থির হবে (মানে চায়ের কণারা আবার সেই A জায়গাটাই দখল করবে), তখন অন্ততঃ একটা কণা আবার তার মূল অবস্থানে ফিরে আসতে বাধ্য! বিশ্বাস করা খুবই শক্ত, না? ■

অবশ্য অংকের দুনিয়াটা মোটেই বিশ্বাসের উপর নির্ভর করে চলে না। সেখানে সবকিছুই প্রমাণ করে দেখাতে হয়। এই theorem-টারও প্রমাণ আছে, তবে সেটা খানিকটা জটিল এবং আমাদের সিলেবাসের বাইরে বলে এই বইতে সে আলোচনায় যাব না। তবে এর একটা কেস আছে যেটা আমরা অনায়াসেই প্রমাণ করতে পারব, এবং ছবি এঁকে অনুভবও করতে পারব। সেটা হল যখন $n = 1$ হবে। সেটা নিয়েই নীচের অংকটা।

Example 8: এবার পৃষ্ঠা নয়, একটা সূতো নিয়ে শুরু করো। ধরো দৈর্ঘ্য হল 1. মনে মনে সূতোটাকে $[0, 1]$ এই

interval-টা বলে কল্পনা করো। এবার সূতোটাকে ভাঁজ করে না দুমড়ে মুচড়ে আবার ওই $[0, 1]$-এ মধ্যেই রাখো (Fig 11)। তবে দেখাতে হবে যে, সূতোটার অন্ততঃ একটা বিন্দু আবার গোড়ার অবস্থানে ফিরে গেছে।

SOLUTION: সূতোর উপর প্রতিটা বিন্দুকে x বলে ভাবতে পারো, যেখানে $x \in [0, 1]$. দুমড়ে মুচড়ে রাখার পর সেই বিন্দুটা যেখানে গেছে, তাকে যদি $f(x)$ বলি, তবে $f : [0, 1] \to [0, 1]$ একটা function পাবে। Fig 11-এর বেলায় যেমন f-টা হবে Fig 12-এর মত। যেহেতু আমরা সূতোটাকে কোথাও কাঁটাছেঁড়া করি নি, তাই f হল continuous. দেখাতে হবে যে, এর অন্ততঃ একটা fixed point আছে, মানে $f(x)$-এর গ্রাফটা 45° লাইনটাকে অন্ততঃ একবার ছেদ করবেই। এবার

Fig 11

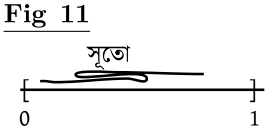


Fig 12

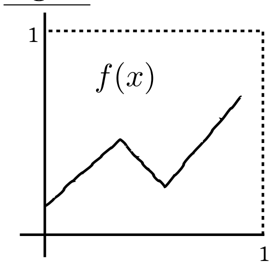


Fig 13

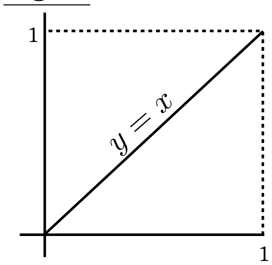
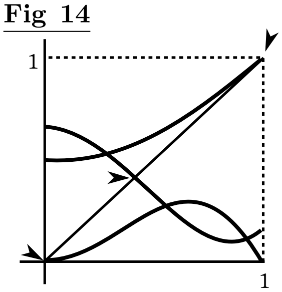


Fig 14



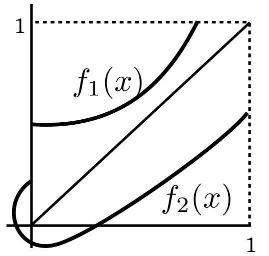


Fig 15

Fig 13 দ্যাখো। চেষ্টা করো এদিক থেকে ওদিক পর্যন্ত একটানা একটা curve আঁকতে। যেভাবেই আঁকো, ওই diagonal-টার গায় না লেগে পথ নেই। কয়েকটা ছবি দেখিয়েছি Fig 14-এ। মনে রেখো, Fig 15-এর মত ফাঁকি দেবার পথ নেই। কারণ, f_1-টা পুরো $[0, 1]$-এর উপর defined হচ্ছে না, আর f_2-টা $[0, 1]$-এর বাইরে বেরিয়ে গেছে, এবং ওটা একটা function-ও হচ্ছে না (কারণ এমন vertical লাইন আঁকা যায় যেটা গ্রাফটাকে একাধিক জায়গায় ছেদ করে)।
অবশ্য খালি ছবি আঁকলেই প্রমাণ হয়ে যায় না, যদিও প্রমাণের পথ খুঁজে পাওয়া যায়। এখানে diagonal-টা যেন একটা গণ্ডীর কাজ করছে, গণ্ডীটা না পেরিয়ে এ ধার থেকে ওধারে যাবার পথ নেই। এরকম গণ্ডী পেরোনোর অংক করার সময়ে প্রধান হাতিয়ার হল intermediate value theorem.

> Since $f : [0, 1] \to [0, 1]$ hence $f(0) \geq 0$ and $f(1) \leq 1$.
> Let $g(x) = f(x) - x$. Then $g(0) \geq 0$ and $g(1) \leq 0$.
> Hence by the intermediate value theorem, $\exists x \in [0, 1] \quad g(x) = 0$, ie, $f(x) = x$, as required.

■

DAY 33
Banach's fixed point theorem

এবার আমরা প্রথম ম্যাজিকটার রহস্যটা শিখব। তার আগে ম্যাজিকটাকে নিয়ে একটু খেলা করে নেওয়া যাক।

Example 9: আমরা একটু আগে $x = \cos x$ নিয়ে কাজ করছিলাম, এবং উত্তরটা 0.7-এর ধারে কাছে ছিল, সুতরাং অবশ্যই $-\frac{\pi}{2}$ থেকে $\frac{\pi}{2}$-এর মধ্যে ছিল। অতএব আমরা equation-টাকে এইভাবেও লিখতে পারতাম--

$$x = \cos^{-1} x.$$

এই equation-টার উপর fixed point iteration লাগিয়ে দ্যাখো তো উত্তর বেরোয় কিনা।
SOLUTION: এবার আমরা এই টেবিলটা পাচ্ছি--

n	x_n
0	0.7
1	0.795
2	0.651
3	0.862
4	0.532
5	1.010
6	????

দেখতেই পাচ্ছ এবার converge করার নামগন্ধও নেই। তার উপর আবার 6 নম্বর ধাপে গিয়ে আর এগোনোই যাচ্ছে না, কারণ $\cos^{-1} x$-এর domain হল $[-1, 1]$. তাই $\cos^{-1}(1.010)$ হল undefined. ■

তাহলেই দ্যাখো, $x = \cos x$-কে একটু অন্যভাবে লেখাতেই সব ঘেঁটে গেল। এবার ওই একই $x = \cos x$-কে আরেকভাবে লিখব।

Example 10: ধরো $g(x) = x - \frac{x - \cos x}{1 + \sin x}$ নিলাম। একটু চিন্তা করলেই দেখবে $g(x)$-এর fixed point আর $\cos x$-এর fixed point আসলে একই, অর্থাৎ $x = \cos x$ হওয়া আর $x = g(x)$ হওয়া সমার্থক[3]। এই $g(x)$-কে ব্যবহার করে fixed point iteration লাগিয়ে দ্যাখো তো কী হয়।

SOLUTION:

n	x_n
1	0.7394365
2	0.7390852
3	0.7390851
4	0.7390851
5	0.7390851

এবার একেবারে ঝড়াৎ করে converge করে গেল! ■

সুতরাং আন্দাজ করতে পারছ, অধিকাংশ ম্যাজিকের মতই আমাদের fixed point iteration ম্যাজিকটাও সবসময়ে কাজ করে না, কখনও ধীরে ধীরে converge করে, কখনো ঝড়াৎ করে converge করে, আবার কখনো বা আদৌ converge করেই না। ম্যাজিকটা ঠিকঠাক কাজ করার জন্য কিছু শর্ত পালিত হওয়া দরকার। সেটাই আমাদের এবারকার আলোচনার বিষয়। প্রথম শর্তটা খুবই সহজ--যদি তুমি $x_n = f(x_{n-1})$ করতে চাও, তার মানে তুমি f-এর আউটপুটটাকেই ফের ইনপুট হিসেবে ঢোকাচ্ছ। সেটা নিশ্চিন্তে করা যাবে একমাত্র তখনই যখন f-এর range-টা f-এর domain-এর subset হবে। এই শর্তটা $x = \cos^{-1} x$-এর বেলায় পালিত না হওয়ায় কী বিপত্তি হয়েছিল সে তো দেখলেই। এক্ষেত্রে $\cos^{-1} x$-এর domain ছিল $[-1, 1]$, কিন্তু $\cos^{-1} x$ নিজে $[-1, 1]$-এর বাইরে গিয়ে পড়তেই পারে। আমাদের উদাহরণে ঠিক সেটাই হয়েছিল, তাই ছয় নম্বর ধাপে $\cos^{-1} x$ বারই করা গেল না। এই শর্তটাকে আমরা লিখব এইভাবে যে, $f : A \to A$ হবে, অর্থাৎ কোনো $x \in A$-এর উপরে f লাগালে $f(x)$-টা ফের A-র মধ্যেই থাকবে। এতে এটুকু অন্ততঃ গ্যারান্টি থাকবে যে $\{x_n\}_n$ বার করতে অসুবিধা হবে না। কিন্তু এই sequence-টা ঠিকঠাক converge করার জন্য আরো শর্ত চাই।
এরকম শর্ত নানাভাবে দেওয়া যায়। একটা সহজ শর্ত পাবে $x = \cos x$-এর বেলায় কী হয়েছিল সেটা একটু খুঁটিয়ে লক্ষ করলেই। সেখানে উত্তরটা পেয়েছিলাম 0.739. আমরা শুরু করেছিলাম $x_0 = 0.7$ নিয়ে, ঠিক উত্তর থেকে যার দূরত্ব হল 0.039. তারপর x_0-এর থেকে পেয়েছিলাম $x_1 = 0.764$, ঠিক উত্তর থেকে যার দূরত্ব 0.026. লক্ষ করো, এটা আগের 0.039-এর থেকে ছোটো, তার মানে আমরা সঠিক উত্তরের আরো কাছে এগিয়ে গেছি। এর পরে এসেছিল $x_2 = 0.721$, যেটা সঠিক উত্তরের আরো কাছে। এই ব্যাপারটা থেকে একটা শর্ত মাথায় আসে, যদি $f(x)$-এর মধ্যে এই "দূরত্ব কমানো" ধর্মটা থাকে, তবে সেখানে fixed point iteration দিয়ে উত্তর বেরোনোর আশা আছে। সেখান থেকেই নীচের সংজ্ঞাটার জন্ম--

DEFINITION: **Contraction map**

Let (X, d) be a metric space. A function $f : X \to X$ is called a **contraction map** if

$$\exists K \in [0, 1) \quad \forall x, y \in X \quad d(f(x), f(y)) \le K \cdot d(x, y).$$

[3] এই বিদ্‌ঘুটে $g(x)$-টা কোথা থেকে পেলাম, সে আলোচনায় যাচ্ছি না।

এখানে একটা ব্যাপারে একটু সাবধান। আমরা কিন্তু খালি $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ বলেই ছেড়ে দিইনি। আমরা বলেছি--এমন K আছে (যেখানে $0 \leq K < 1$) যাতে যাই x, y নাও না কেন $d(f(x), f(y))$ শুধু যে $d(x, y)$-এর ছোটো হবে তাই নয়, $K \cdot d(x, y)$-এর চেয়েও ছোটো হবে। দুটোর মধ্যে একটা সূক্ষ্ম পার্থক্য আছে। সেটা একটা উদাহরণ দেখলে বুঝতে সুবিধা হবে।

Example 11: ধরো $f(x) = x + \frac{1}{x}$ যেখানে $x \in [1, \infty)$. এটা কি একটা contraction map?

SOLUTION: যাই $x, y \in [1, \infty)$ নাও না কেন, $|f(x) - f(y)| = \left|x - y + \frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = |x - y| \times \left(1 - \frac{1}{xy}\right) < |x - y|$ হবে। কিন্তু তাও এটা মোটেই একটা contraction map নয়, কারণ x, y যতই বড় নেবে, ততই $|f(x) - f(y)|$ ক্রমশঃ $|x-y|$-এর গায় গিয়ে পড়বে। তাই যাই $K \in [0, 1)$ নাও না কেন, এমন x, y পাবে যাতে $|f(x) - f(x)| > K|x - y|$ হয়ে যাবে। ■

এর সঙ্গে নীচের উদাহরণটা তুলনা করো।

Example 12: আবার সেই $f(x) = x + \frac{1}{x}$-ই নাও, কিন্তু এবার $x \in [1, 10]$. এখানে কি $f(x)$ একটা contraction map?

SOLUTION: হ্যাঁ, কারণ আগের মতই এখানেও $|f(x) - f(y)| = \cdots = |x - y| \times \left(1 - \frac{1}{xy}\right) < \left(1 - \frac{1}{10 \times 10}\right)|x - y|$, যেহেতু $\left(1 - \frac{1}{xy}\right)$ সবচেয়ে বেশী হতে পারে $\left(1 - \frac{1}{10 \times 10}\right)$, যেটা < 1. ■

Contraction map-দের একটা ধর্ম সংজ্ঞাটা দেখলেই বোঝা যায়--contraction map মাত্রেই continuous হতে বাধ্য। শুধু continuous-ই নয়, uniformly continuous-ও না হয়ে যায় না। সেই কথাটা গুছিয়ে লিখে রাখি।

THEOREM

Let (X, d) be a metric space. If $f : X \to X$ is a contraction map, then it must be uniformly continuous on X.

Proof:

To show

$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X \quad \forall y \in N(x, \delta) \quad f(y) \in N(x, \epsilon)$.

$\forall \epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

Since f is a contraction map, hence $\exists K \in [0, 1) \quad \forall x, y \in X \quad d(f(x), f(y)) \leq K \cdot d(x, y)$.

আন্দাজ করতে পারছ হয়তো যে, $\delta = \frac{\epsilon}{K}$ নিলে সুবিধা হবে। তবে $K = 0$ হয়ে যাওয়া সম্ভব। অবশ্য $K = 0$ হওয়া মানে $f(x)$-টা আসলে একটা constant function. অতএব সে ক্ষেত্রে যা খুশী $\delta > 0$ নিলেই হবে। অতএব--

$\exists \delta$ Choose $\delta = \begin{cases} \frac{\epsilon}{K} & \text{if } K \in (0, 1) \\ 1 & \text{if } K = 0 \end{cases}$.

$\forall x, y$ Take any $x \in X$ and any $y \in N(x, \delta)$.

Then $d(f(x), f(y)) \leq K \cdot d(x, y) < K \times \frac{\epsilon}{K} = \epsilon$, if $K \in (0, 1)$.

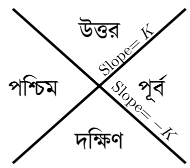


Fig 16

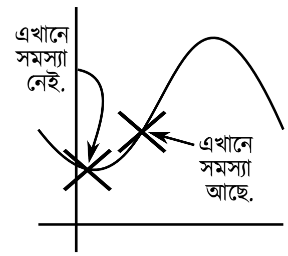


Fig 17

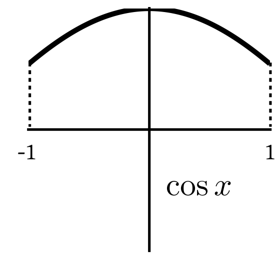


Fig 18

Also if $K = 0$, then $d(f(x), f(y)) \leq K \cdot d(x, y) = 0 < \epsilon$.
So, in either case, $d(f(x), f(y)) < \epsilon$, as required.

[Q.E.D]

Exercise 1: আচ্ছা, কোনো $f : X \to X$ যদি uniformly continuous হয়, তবেই কি সেটা একটা contraction map হবে? ■

গ্রাফ থেকে contraction map-দের চেনা সহজ। অবশ্য গ্রাফ আঁকতে পারার জন্য ধরে নিচ্ছি যে f-টা $\mathbb{R}$-এর (বা $\mathbb{R}$-এর কোনো subset-এর উপর) defined. দেখতে হবে গ্রাফটা যেন "নুয়ে পড়া" মতন হয়। বিশদ করে বলি--প্রথমে মনে মনে একটা গুণ চিহ্নের মত দেখতে কাঠামো (Fig 16) কল্পনা করো, যেখানে একটা লাইনের slope হল $K \in [0, 1)$ আর অন্যটার slope হল $-K$. কাঠামোটার কেন্দ্রটাকে পুরো গ্রাফটার উপর দিয়ে বুলিয়ে নাও (Fig 17)। লক্ষ করো, গ্রাফটা সর্বত্রই কাঠামোর "পূর্ব" বা "পশ্চিম" অংশের মধ্যে থাকছে কিনা। যদি কোনো $K \in [0, 1)$-এর জন্য কাজটা করা যায়, একমাত্র তবেই contraction map হবে।

Example 13: কয়েকটা f(x) দিচ্ছি। এদের গ্রাফ এঁকে চোখের আন্দাজে বলতে হবে এদের মধ্যে কারা contraction map আর কারা নয়।
(i) $f(x) = x^2$ (ii) $f(x) = \sqrt{x}$ (iii) $f(x) = 2x$ (iv) $f(x) = \frac{x}{2}$ (v) $f(x) = e^{-|x|}$
■

Example 14: আমরা যখন $x = \cos x$ নিয়ে কাজ করেছিলাম, তখন fixed point iteration কাজ করেছিল। পরীক্ষা করে দ্যাখো তো $[-1, 1]$-এর উপরে $\cos x$-টা একটা contraction map কিনা। প্রথমে Fig 18-এর গ্রাফটা দেখে আন্দাজ করো। তারপর সংজ্ঞা থেকে প্রমাণ করো।
Solution: লক্ষ করো $\cos x$-এর derivative হল $\sin x$, আর $x \in [-1, 1]$ হলে $|\sin x| \leq sin 1 < 1$ হয়। তাই contraction map হবে।
এখানে $|\sin \xi|$ কেন $\leq \sin 1$ হল বুঝলে তো? না বুঝলে গ্রাফ দিয়ে ভাবো। প্রথমে $x \in [-1, 1]$-এর জন্য $\sin x$-এর গ্রাফটা নাও (Fig 19), তারপর সেটাকে ভাঁজ করে Fig 20-এর মত $|\sin x|$-এর গ্রাফ বানালেই দেখবে যে maximum-টা হচ্ছে $\sin 1$.
অংক কষে প্রমাণ করা যায় এইভাবে--

Choose $K = \sin 1 \in [0, 1)$.
Take any $x, y \in [-1, 1]$.

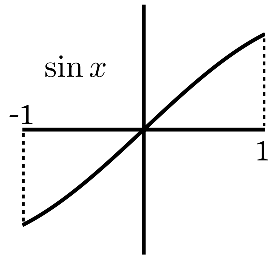


Fig 19

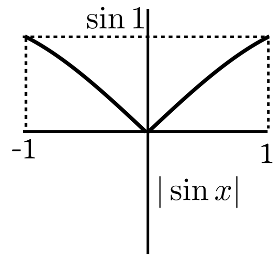


Fig 20

> Then, by mean value theorem, $|\cos x - \cos y| = |x - y| \times |\sin \xi|$ for some ξ between x, y.

আশা করি mean value theorem কী জিনিস ভুলে যাও নি-- যদি $f(x)$ এমন একটা function হয়, যেটা $[a, b]$-এর উপরে continuous এবং (a, b)-এর উপরে differentiable, তবে এমন $\xi \in (a, b)$ পাবে, যাতে $f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b - a)$ হয়।

> Since $|\sin \xi| \leq \sin 1 = K$, hence the result.

■

এই অংকটা বুঝে থাকলে একইভাবে নীচের theorem-টাও প্রমাণ হয়ে যাবে।

THEOREM

Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a differentiable function such that

$$\exists K \in [0, 1) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |f'(x)| \leq K.$$

Then f must be a contraction map.

তবে সাবধান, contraction map মাত্রেই differentiable হবেই, এমনটা ভেবে বোসো না যেন।

Exercise 2: এমন একটা $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ দাও দেখি, যেটা একটা contraction map, কিন্তু অন্ততঃ এক জায়গায় differentiable নয়। ■

যাই হোক, contraction map-দের নিয়ে অনেক কথা বলা গেল। যে প্রসঙ্গ থেকে ওদের কথা এসেছিল, এবার সেই fixed point iteration-এর আলোচনায় ফিরে যাই। যদি (X, d) একটা complete metric space আর $f : X \to X$ একটা contraction map হয়, তবে $x = f(x)$-এর উপরে fixed point iteration লাগালে সমাধান পাওয়া যাবেই। এই কথাটাকেই গুছিয়ে লিখলে পাবে নীচের theorem-টা, যার নাম **contraction mapping theorem** বা **Banach's fixed point theorem**. মনে রেখো Banach-এর উচ্চারণ হল "বানাখ্"।

Banach's fixed point theorem

Let (X, d) be a complete metric space. Let $f : X \to X$ be any contraction map. Then f has a *unique* fixed point (say L) in X. Also, for any $x_0 \in X$ the sequence $\{x_n\}_n$ defined by $x_n = f(x_{n-1})$ must converge to L.

Proof: এখানে তিনটে জিনিস দেখাতে হবে--এক, fixed point আছে, দুই, সেটা unique, এবং তিন, $\{x_n\}_n$ সেখানে converge করে। প্রমাণটা কিন্তু হবে সামান্য ঘুরপথে। প্রথমে দেখাব যে, $\{x_n\}_n$ আদৌ converge করে। তার limit-টাকে বলব L. তারপর দেখাব যে, এই L-টাই একটা fixed point হবে। সবশেষে দেখাব যে এই fixed point-টা unique. প্রথম ধাপ হল $\{x_n\}_n$-এর convergence দেখানো। তার জন্য এটা দেখানোই যথেষ্ট যে $\{x_n\}_n$ একটা Cauchy sequence.

Step 1: Take any $x_0 \in X$.

We define the sequence $\{x_n\}_n$ where $x_n = f(x_{n-1})$.

Shall show that $\{x_n\}_n$ is a Cauchy sequence, ie,

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > m \geq N \quad d(x_m, x_n) < \epsilon.$$

$\forall\epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

Let $\alpha = d(x_0, x_1)$.

লক্ষ করো, $d(x_1, x_2) = d(f(x_0), f(x_1)) \leq K\alpha$. আবার $d(x_2, x_3) = d(f(x_1), f(x_2)) \leq K^2\alpha$. এইভাবে চলতে চলতে--

Then for $n \in \mathbb{N}$ we have $d(x_{n-1}, x_n) \leq \alpha K^{n-1}$.

So for any $m < n \in \mathbb{N}$ we have

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n) \\ &= \alpha(K^m + \cdots + K^{n-1}) \\ &\leq \alpha((K^m + \cdots) \quad [\because K \in [0, 1)] \\ &= \frac{\alpha K^m}{1-K} \to 0, \text{ as } m \to \infty. \end{aligned}$$

Now $\exists N \in \mathbb{N} \quad \frac{\alpha K^N}{1-K} < \epsilon$.

$\exists N$ Choose this $N \in \mathbb{N}$.

$\forall m, n$ Take any $m, n \geq N$ with $m < n$.

Then $d(x_m, x_n) \leq \frac{\alpha K^m}{1-K} \leq \frac{\alpha K^N}{1-K} < \epsilon$, as required.

এবার দ্বিতীয় ধাপে দেখাব যে, $\{x_n\}_n$-এর limit-টা একটা fixed point হবে--

Step 2: Since $\{x_n\}_n$ is a Cauchy sequence in the complete metric space (X, d), hence $\{x_n\}_n$ converges to some $L \in X$.

Shall show that L is a fixed point of f, ie, $f(L) = L$.

> We have $x_n \to L$. Since f is continuous, hence $f(x_n) \to f(L)$, ie, $x_{n+1} \to f(L)$.
> But we know $x_{n+1} \to L$.
> Hence $f(L) = L$, as required.

সবশেষে uniqueness দেখানোর পালা--

> Step 3: Uniqueness: Let $L_1, L_2 \in X$ both be fixed points of f. Shall show $L_1 = L_2$.
> $$d(L_1, L_2) = d(f(L_1), f(L_2)) \leq K \cdot d(L_1, L_2).$$
> So $d(L_1, L_2) = 0$, and hence $L_1 = L_2$, as required.

[Q.E.D]

Exercise 3: দেখাও যে, যাই $x_0 \in \mathbb{R}$ নিয়ে শুরু করি, fixed point iteration লাগালে $\cos x = x$-এর সমাধান বেরোতে বাধ্য। ■

DAY 34
Differential equation-এ প্রয়োগ (part 1)

এবার আমরা Banach's fixed point theorem-এর একটা জবরদস্ত্ প্রয়োগ দেখব। প্রয়োগটা হল differential equation-দের নিয়ে। ব্যাপারটা বোঝার জন্য আমরা ছোটোবেলায় স্কুলে শেখা কিছু অংক দিয়ে শুরু করব।

34.1 গোড়ার কথা

ছোটোবেলায় আমরা প্রথমে যোগ-বিয়োগ ইত্যাদি শিখি। তখন আমরা এইরকম অংক করি, $10 + 2 = ?$ অর্থাৎ যোগ করা যেন একটা যন্ত্র, তার মধ্যে দুটো ইনপুট দিলাম, তোমার কাজ হল আউটপুটটা বার করা। আরেকটু বড় হলে এর উল্টো দিকটা করি-- আউটপুট থেকে ইনপুট বার করা, কোন্ সংখ্যার সঙ্গে 2 যোগ করলে 12 হয়? সাধারণতঃ এইভাবেই algebra শেখার শুরু হয়, $x + 2 = 12$ হলে $x = ?$ এর পরের ধাপের অংক হল যেখানে ইনপুট আউটপুট কোনোটাই না বলে দিয়ে ওদের মধ্যে একটা সম্পর্ক বলে দেওয়া হয়-- 10 বছর পরে তোমার বয়স তোমার এখনকার বয়সের দ্বিগুণ হবে। তাহলে তোমার বয়স এখন কত? এখানে equation-টা হবে

$$x + 10 = 2x,$$

যার সমাধান হল $x = 10$.
শুধু ছোটোবেলা বলেই নয়, অংকের দুনিয়ায় অনেক সময়েই এই তিনটে ধাপ লক্ষ করা যায়--

- এক, কোনো যন্ত্র আছে। তার একটা ইনপুট দেওয়া আছে। তার জন্য আউটপুট বার করতে হবে। যেমন, যখন আমাদেরকে বলা হয় $\sin x$-কে differentiate করতে, তখন যন্ত্রটা হল "differentiation", তার মধ্যে $\sin x$ ইনপুট দিলে আউটপুট বেরোয় $\cos x$.

- দুই, অনেক সময়ে আউটপুট দিয়ে ইনপুটটা বার করতে বলা হয়। যেমন, যখন আমরা $\cos x$-এর indefinite integral বার করি, তখন আসলে দেখি কোন্ কোন্ function-কে "differentiation" নামক যন্ত্রে ঢোকালে $\cos x$ আউটপুট পাওয়া যায়।

- তিন, ইনপুট বা আউটপুট আলাদা করে বলা থাকে না, খালি তাদের মধ্যে কোনো সম্পর্ক বলা থাকে। যেমন, কোন্ function-কে differentiate করলে সেই function-এরই square পাওয়া যায়? এইটাকে equation-এর আকারে লিখলে পাবে এই differential equation-টা--

$$\frac{dy}{dx} = y^2.$$

আশা করি সন্দেহ নেই যে, এই তিনটে ধরণের অংকের মধ্যে প্রথমটা সবচেয়ে সহজ, দ্বিতীয়টা আরেকটু কঠিন, আর তৃতীয়টা সবচেয়ে কঠিন। আমরা যে fixed point iteration-এর কথা শিখেছিলাম, তার কেরামতি হল প্রথমটার কায়দাতেই তৃতীয়টাকে ঘায়েল করা। সেটা $x = \cos x$-এর বেলাতেই দেখেছি। সেখানে cos-টা যেন যন্ত্র। তাতে x ঢোকালে $\cos x$ বেরিয়ে আসে। সুতরাং $x = \cos x$ সমাধান করা মানে এই প্রশ্নের উত্তর বার করা--

> কোন্ ইনপুট ঢোকালে আউটপুটটা ইনপুটের সমান হবে?

ক্যালকুলেটার দিয়ে আমরা x থেকে $\cos x$ বার করতে পারি। আমরা fixed point iteration ব্যবহার করে সেই ক্যালকুলেটার দিয়েই $x = \cos x$-এর সমাধান করে ফেলেছিলাম। এবার দেখব differential equation-এর বেলায় একই কাজ কীভাবে করা যায়। একটা উদাহরণ নিয়ে শুরু করি।

Example 15: কোন্ function-কে differentiate করলে বদলায় না?

SOLUTION: এখানে যন্ত্রটা হল "differentiation". আমরা সেইসব ইনপুট খুঁজছি, যাতে আউটপুটটা ইনপুটের সমান হয়। এরকম একটা ইনপুট আমরা সবাই জানি, e^x. যদি এরকম যাবতীয় ইনপুট বার করতে হয়, তবে প্রশ্নটাকে differential equation-এর আকারে লিখে পাব

$$\frac{dy}{dx} = y,$$

যার general solution হল ce^x, যেখানে c একটা arbitrary constant.
আমরা এবার দেখব fixed point iteration দিয়ে এই পরিচিত উত্তরে পৌঁছতে পারা যায় কিনা।

34.2 Fixed point iteration

এখানে fixed point iteration-টা হবে

$$y_n(x) = y'_{n-1}(x),$$

অর্থাৎ কোনো একটা differentiable function নিয়ে শুরু করব $y_0(x)$. সেটাকে "differentiation" যন্ত্রের মধ্যে ঢোকালে যে আউটপুটটা পাব, সেটাকে বলব $y_1(x)$. সেই $y_1(x)$-কে আবার "differentiation" যন্ত্রের ইনপুট হিসেবে ব্যবহার করলে নতুন যে আউটপুট পাব, সেটাকে বলব $y_2(x)$, এইরকম।
ধরো $y_0(x) = x$ নিয়ে শুরু করলাম। এ থেকে পাবে $y_1(x) = y'_0(x) \equiv 1$. তা থেকে পাবে $y_2(x) = y'_1(x) \equiv 0$. এরপর থেকে সব $y_n(x)$-ই 0 আসবে, মানে converge করে গেল। এবং সত্যিই, $y(x) \equiv 0$ আমাদের differential equation-টার একটা সমাধান! যদি অন্য কোনো $y_0(x)$ নিয়ে শুরু করতে তবেও কি একই ব্যাপার হত। কিছু বিভিন্ন $y_0(x)$ নিয়ে পরীক্ষা করে দেখা যাক। যদি $y_0(x) = x^2$ নাও, তবেও ওই একই জায়গায় converge করবে--

n	$y_n(x)$
0	x^2
1	$2x$
2	2
3	0
4	0
⋮	⋮

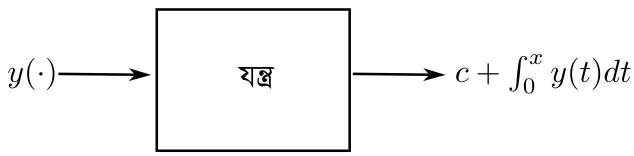


Fig 21

আচ্ছা, এবার ধরো $y_0(x) = \sin x$ নিলাম। তাহলে $y_1(x) = \cos x$ পাবে। তারপর আসবে $y_2(x) = -\sin x$. তারপরে $y_3(x) = -\cos x$ এবং $y_4(x) = \sin x$. ব্যস্, এবার চক্রাকারে এই চারটে জিনিসই বার বার ঘুরে ঘুরে আসবে, converge করবে না মোটেই।
আরেকটা $y_0(x)$ দিচ্ছি, $y_0(x) = e^{2x}$. এবার ব্যাপারটা হবে এইরকম--

n	$y_n(x)$
0	e^{2x}
1	$2e^{2x}$
2	2^2e^{2x}
$\vdots$	$\vdots$
n	2^ne^{2x}
$\vdots$	$\vdots$

এখানে $y_n(x) = 2^ne^{2x}$ আসছে, যেটা যেকোনো x-এর জন্যই একেবারে ∞-তে diverge করে যাবে! ■

এ সব থেকে মোদ্দা কথা বোঝা গেল যে, $\frac{dy}{dx} = y$-এর উপরে সরাসরি fixed point iteration লাগালে সবসময়ে সুবিধা হচ্ছে না! এবার সামান্য ঘুরপথে এগোব।
আমরা $\frac{dy}{dx} = y$-এর দুপাশকে integrate করে লিখতে পারি $y = \int y(x)dx$. এর মধ্যে একটা arbitrary constant থাকতে হবে। সেই জন্য ধরে নেওয়া যাক $y(0) = c$. তাহলে বলতে পারি

$$y(x) = c + \int_0^x y(t)dt.$$

এবার এটার উপর fixed point iteration লাগিয়ে দেখি ফল পাওয়া যায় কিনা। এর জন্য RHS-টাকে একটা যন্ত্র বলে ভাবব (Fig 21), যার মধ্যে ইনপুট হিসেবে কোনো function $y(x)$ ঢোকালে আউটপুট বেরোয় $c + \int_0^x y(t)dt$, যেটা হল আরেকটা function. একটা উদাহরণ নিয়ে এই যন্ত্রটার সঙ্গে বন্ধুত্ব করে ফেলা যাক।

Example 16: যদি ইনপুট নিই $\sin x$, তবে আউটপুট কী হবে?

SOLUTION: উত্তর হল $c + \int_0^x \sin(t)dt = c - \cos(t)|_0^x = c + 1 - \cos x$. ■

ধরো $y_0(x) \equiv 0$ নিলাম। এটা যন্ত্রের মধ্যে ঢোকালে আউটপুট আসবে

$$y_1(x) = c + 0 = c.$$

পরের ধাপে এই y_1-কে ফের ইনপুট হিসেবে যন্ত্রটার মধ্যে ঢোকালে আউটপুট হবে

$$y_2(x) = c + \int_0^x y_1(t)dt = c + cx.$$

আরেক ধাপ এগোলে

$$y_3(x) = c + \int_0^x y_2(t)dt = \cdots = c\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right).$$

প্যাটার্ণটা চিনতে পারছ? যেকোনো $n \in \mathbb{N}$-এর জন্যই

$$y_n(x) = c\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right).$$

এর limit যে আমাদের পরিচিত উত্তর ce^x, সে তো দেখাই যাচ্ছে!

Exercise 4: $y_0(x) \equiv 1$ নিয়ে শুরু করে দ্যাখো। একই limit পাবে।
■

তবে কি যেকোনো differential equation-কেই এরকম integral দিয়ে লিখে নিলে fixed point iteration কাজ করে? না, সেরকম কোনো গ্যারান্টি নেই। কিন্তু কোনো কোনো ক্ষেত্রে এখানে Banach's fixed point theorem লাগানো যেতে পারে। এর ফলে জন্ম হয় একটা গুরুত্বপূর্ণ theorem-এর। এবার আমরা সেই দিকেই এগোব।
এই উদাহরণটা সহজ ছিল, ডানদিকে ছিল খালি y. তাই এত fixed point iteration-এর ঝকমারি ছাড়াই সমাধান করে ফেলা যেত। কিন্তু অনেক সময়ে ডানদিকে x আর y দুজনেই জড়ামড়ি করে থাকে, যেমন ধরো এরকম বিদঘুটে কিছু একটা--

$$\frac{dy}{dx} = \sin\left(e^{x\tan y}\sin(x + y^2)\right).$$

আমরা যে আলোচনাটা করতে চলেছি, তার আওতায় এরকম বিদঘুটে জিনিসও আসতে পারে। তাই গোড়াতেই আমাদের আলোচ্য differential equation-দের general form-টা লিখে নিই--

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \text{ যেখানে } y(x_0) = y_0. \qquad (*)$$

Notation-টা সামান্য বদলেছি, $y(0) = c$-এর বদলে $y(x_0) = y_0$ লিখেছি। সেটা দেখতে একটু বেশী সুন্দর হবে। সাবধান, এই y_0 হল যাকে একটু আগে আমরা c লিখছিলাম। এর সঙ্গে $y_0(x)$-এর কোনো সম্পর্ক নেই। বস্তুতঃ এরপর থেকে $y_0(x)$ নিয়ে আর কাজ করার দরকার হবে না। তাই y_0 মানে এখন থেকে একটা arbitrary constant.
এইবার পুরো ব্যাপারটাকে একটু ছবি দিয়ে ভেবে নিলে সুবিধা হবে।

34.3 ছবি দিয়ে ভাবা

মনে করো যেন একটা পাতা হাওয়ায় উড়ে যাচ্ছে। যে পথে উড়ে যাচ্ছে, সেটা ধরো একটা function $y(x)$-এর গ্রাফ (Fig 22)। হাওয়া যেখানে যেদিকে বইবে, পাতার গতির অভিমুখও সেখানে সেইদিকেই হবে। যদি পাতাটা (x, y) অবস্থানে থাকে, তবে সেই বিন্দুতে তার অভিমুখ মানে হল tangent-টা, যার slope-ই হল $\frac{dy}{dx}$, যেটা বলা আছে $f(x, y)$. বোঝার জন্য

Fig 22

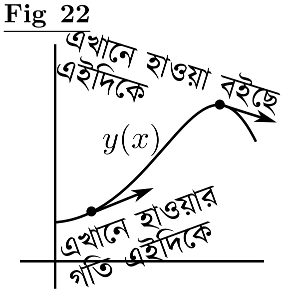
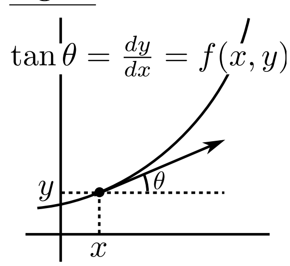


Fig 23



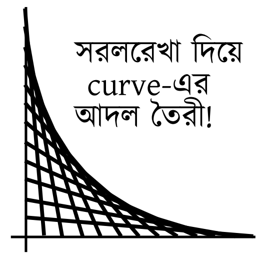


Fig 24

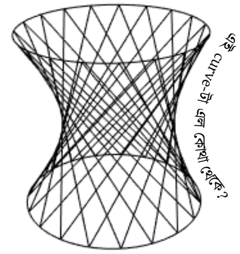


Fig 25

Fig 23 দেখে নাও। অতএব প্রতিটা বিন্দু (x, y)-তে $f(x, y)$ বলা থাকা মানে হল প্রতিটা বিন্দুতেই হাওয়ার অভিমুখ বলা আছে[4]। আবার বলা আছে যে $y(x_0) = y_0$, মানে পাতাটা একসময়ে (x_0, y_0) বিন্দুতে ছিল। Differential equation-টা সমাধান করা মানে $y(x)$ বার করা, অর্থাৎ পাতাটার পুরো গতিপথটা বার করা। এবার ভেবে দ্যাখো, তুমি একটা পাতাকে হাওয়ার মধ্যে (x_0, y_0) বিন্দু থেকে ছেড়ে দিলে। পাতাটা কি কখনও মাথা চুলকে বলবে--"তাই তো, কোন্ পথে উড়ে যাব ভেবে পাচ্ছি না তো!" হাওয়া যেভাবেই বয়ে যাক না কেন, পাতাটা সেই অনুযায়ী কোনো একটা নির্দিষ্ট পথেই উড়ে যাবে। এ থেকে লোকে এক সময়ে মনে করত যে, যাই (x_0, y_0) আর $f(x, y)$ নাও না কেন, অবশ্যই (*)-এর unique solution থাকতে বাধ্য। এই বিশ্বাসে প্রথম আঘাত হানেন Clairaut (ক্ল্যারৌ) নামে একজন ফরাসী গণিতজ্ঞ।

তিনি বললেন যে, অনেক সময়েই দেখা যায় অনেকগুলো সরলরেখা মিলে একটা curve-এর আদল পাওয়া যায়। একটা উদাহরণ দেখিয়েছি Fig 24-এ। যাদের বাড়িতে Fig 25-এর মত দেখতে বেতের মোড়া আছে, তারা লক্ষ করেছ হয়তো বেতের কাঠিগুলো সটান সোজা হলেও মোড়ার ধার দুটো কেমন hyperbola-র মত বাঁকা দেখায়। Clairaut বললেন যদি বিভিন্ন বিন্দুতে হাওয়ার অভিমুখ এইরকম curve-এর-আদল-বানানো সরলরেখাদের মত হয় (Fig 26), তবে কিন্তু P বিন্দুর পাতাটা ধন্দে পড়ে যাবে--সরলরেখা বরাবর যাবে, নাকি curve-টা বরাবর? সুতরাং সেক্ষেত্রে differential equation-এর solution-টা unique থাকবে না। কোনো ক্ষেত্রে এমনও হতে পারে যে আদৌ কোনো solution-ই থাকবে না, যেমন যদি হাওয়া বইত Fig 27-এর মত করে (হাওয়াটা (x_0, y_0) বিন্দু থেকে চতুর্দিকে ছড়িয়ে পড়ছে, কিন্তু ঠিক সেই বিন্দুতে কোনো হাওয়া বইছে না), তবে পাতাটা কোনোভাবেই (x_0, y_0)-তে আসতেই পারত না, আর যদি নেহাত তুমি হাতে করে নিয়ে পাতাটাকে ওই বিন্দু থেকে ছাড়তে, তবে ওখানেই স্থির হয়ে থাকত, কারণ ওই বিন্দুতে কোনো হাওয়া বইছে না। অবশ্যই বাস্তবে এমনধারা উদ্ভট আচরণ আমরা দেখি না, কারণ হাওয়া কখনো Fig 26 বা Fig 27-র মত করে বইতেই পারবে না। যেমন, Fig 27-এর মত বইতে হলে (x_0, y_0) বিন্দুতে একটা বায়ু-উৎপাদক যন্ত্র বসাতে হবে।

সুতরাং এটা বোঝা যাচ্ছে যে, $f(x, y)$-টা যদি যথেষ্ট ভদ্র হয়, তবে (*)-এর unique solution থাকবে। প্রশ্ন হল "যথেষ্ট ভদ্র" বলতে অংকের ভাষায় কী বোঝাচ্ছে? মানে $f(x, y)$-এর উপর কী sufficient condition বসালে (*)-এর unique solution থাকতে বাধ্য?

সেই প্রশ্নের উত্তরই আমরা খুঁজব আগামীকাল।

[4] যেহেতু $\frac{dy}{dx}$ হল x বাড়লে y-এর বৃদ্ধির হার, তাই আমরা ধরে নেব যে হাওয়াটা বইছে বাঁ থেকে ডানে, মানে x যেদিকে বাড়ছে সেইদিকে।

Fig 26

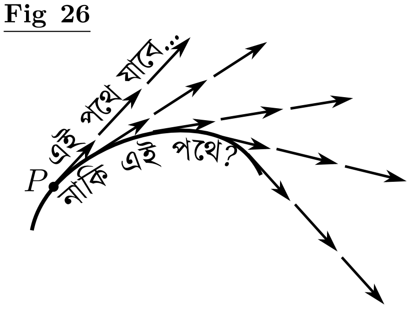
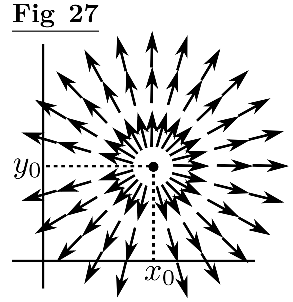


Fig 27



DAY 35
Differential equation-এ প্রয়োগ (part 2)

গতকাল থেকেই আমরা কাজ করছি এই জাতীয় differential equation নিয়ে--

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \text{ যেখানে } y(x_0) = y_0.$$

আমরা আন্দাজ করতে পেরেছি যে $f(x,y)$-টা "যথেষ্ট ভদ্র" হলে এই differential equation-টার unique solution থাকবে। আমাদের প্রশ্ন হল এরকম একটা ভদ্রগোছের sufficient condition বার করা।
এই প্রশ্নের উত্তর বার করতে চারজন গণিতজ্ঞের অবদান আছে, Cauchy (কোশি), Lipschitz (লিপশিৎস্), Picard (পিকার্ড) এবং Lindelöf (লিণ্ডেলফ্)। তাঁরা যে শর্তটা দিয়েছিলেন সেটা একটা বিখ্যাত theorem হয়ে আছে। আমরা theorem-টা একটু পরেই দেব, এবং প্রমাণও করব। কিন্তু তার আগে নিজেরাই একটু গণিতজ্ঞ সেজে খেলাচ্ছলে চেষ্টা করে দেখব সেই theorem-টার ধারেকাছে পৌঁছতে পারি কিনা। তবে অংকের খেলায় মাথা ঘামাতে যাদের ভালো লাগে না, তারা চাইলে সরাসরি এক লাফে theorem-টা এবং তার প্রমাণটা[5] পড়ে নিতে পারো, যদিও সেক্ষেত্রে এটা বোঝা কঠিন হবে যে theorem-এর শর্তগুলো এবং প্রমাণের ধাপগুলো কোথা থেকে এল! অবশ্য কে না জানে মুখস্থ করে পরীক্ষা পাশ করার জন্য বোঝা-টোঝার দরকারই পড়ে না!

35.1 গণিতজ্ঞ সেজে বসা

অংকের খুঁটিনাটির মধ্যে যাওয়ার আগে বুঝে নেওয়া যাক $f(x,y)$-টা ঠিক কোথায় defined. আমরা ধরে নেব (x_0,y_0)-কে ঘিরে খানিকটা rectangle জুড়ে defined. ধরো rectangle-টা নিলাম--

$$[x_0-\alpha, x_0+\alpha] \times [y_0-\beta, y_0+\beta],$$

যেখানে $\alpha,\beta > 0$. এটাকে মনে মনে একটা টিভির পর্দা বলে ভাবতে পারো (Fig 28)। পুরো নাটকটাই এই পর্দার মধ্যে হচ্ছে। এর উপরে প্রতিটা (x,y) বিন্দুতে $f(x,y)$ দেওয়া আছে, মানে হাওয়ার অভিমুখ বলা আছে (Fig 29-এ এরকম কয়েকটা তীরচিহ্ন দেখিয়েছি)। বলা আছে যে, পাতাটা (x_0,y_0) বিন্দু দিয়ে গেছে। এ থেকে পাতার পুরো গতিপথটা বার করাই উদ্দেশ্য। এরকম একটা গতিপথ $y(x)$ দেখিয়েছি Fig 30-এ। লক্ষ করো, পাতাটাকে যে একেবারে বাঁ ধার থেকে ডান ধার অব্ধি যেতে হবে, এমন কিন্তু কোনো কথা নেই। তাই $y(x)$ হয়তো পুরো $[x_0-\alpha, x_0+\alpha]$-র উপর defined নাও হতে পারে। আমরা খালি কোনো $\delta > 0$-র জন্য $[x_0-\delta, x_0+\delta]$-র উপরে $y(x)$-কে define করতে পারলেই খুশি (Fig 31)। ভালো করে বুঝে নেওয়া যাক, আমাদের কী দেওয়া থাকবে, আর কী বার করতে হবে। আমাদেরকে বলে দেওয়া থাকবে--

- (x_0,y_0) বিন্দুটা,
- দুটো সংখ্যা $\alpha,\beta > 0$,
- $f(x,y)$-এর ফর্মুলা, যেখানে $(x,y) \in [x_0-\alpha, x_0+\alpha] \times [y_0-\beta, y_0+\beta]$.

এ থেকে আমাদের বার করতে হবে এমন একটা $\delta > 0$ এবং একটা $y(x)$ যাতে--

- $y(x)$-টা $[x_0-\delta, x_0+\delta]$-র উপরে defined হয়,
- $y'(x) = f(x, y(x))$ হয়,
- $y(x_0) = y_0$ হয়।

[5] 248 নম্বর পাতায় "জবরদস্ত্ theorem" বলে একটা শিরোনাম থেকে শুরু।

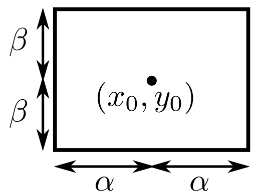


Fig 28

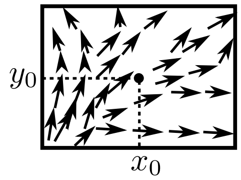


Fig 29

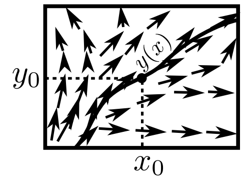


Fig 30

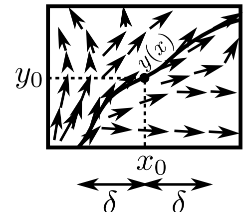


Fig 31

এরকম $y(x)$ যে পাওয়া যাবেই, এমন কোনো কথা নেই। বস্তুতঃ আমাদের মূল আগ্রহ সেটা নিয়েই, মানে f-এর উপর এমন কোনো ভদ্রগোছের শর্ত চাপানো, যাতে এরকম $y(x)$ পাওয়া যায়, এবং সেই $y(x)$-টা আবার unique-ও হয়।
আমাদের পরিকল্পনা হল fixed point iteration-এর ধারণা ব্যবহার করে এমন একটা শর্ত বার করা। আমরা গতকালের উদাহরণে দেখেছিলাম differential equation-টাকে integral-এর আকারে লিখে নিলে সুবিধা হয়। তাই (*)-এর অংকটাকেও আমরা প্রথমেই integral-এর আকারে লিখে নেব--

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt. \tag{**}$$

এখানে integral-টা বার করতে আবার অসুবিধা হবে না তো? আমরা তো এখন ভগবান (থুড়ি, গণিতজ্ঞ!) সেজেছি। অসুবিধা হলে আমরা f-এর উপরে যা খুশি ভদ্র শর্ত বসিয়ে অসুবিধা দূর করে নেব। আমরা জানি continuous হলে integrable হয়, অতএব $f(x, y)$-কে continuous ধরে নেব। আর $y(x)$ তো differentiable আছেই[6], সুতরাং continuous-ও বটে, তাই $f(x, y(x))$-ও continuous হবে, সুতরাং integrate করতে কোনো আপত্তি থাকতে পারে না।
ভালো করে বুঝে নাও যে, কোনো $y(x)$ যদি (*) শর্তটা পালন করে তবে (**)-ও পালন করতে বাধ্য, এবং বিপরীতপক্ষে (**) পালন করলে (*) পালন না করে যায় না। (*)-এর ডানদিকটাকে আমরা y-এর একটা function হিসেবে লিখব (ধরো T), অর্থাৎ ডানদিকটা হবে

$$T(y) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt.$$

এখানে T যেন একটা যন্ত্র, যার ইনপুট হল একটা function আর আউটপুট হল আরেকটা function. একটা উদাহরণ দেখলে বুঝতে সুবিধা হবে।

Example 17: ধরো $f(x, y) = x + y$ নিলাম। তাহলে T হল--

$$T(y) = y_0 + \int_{x_0}^{x} t + y(t)dt = y_0 + \tfrac{1}{2}(x^2 - x_0^2) + \int_{x_0}^{x} y(t)dt.$$

এই যন্ত্রে যদি $y(x) = \sin x$ ইনপুট ঢোকাই, তবে কী আউটপুট বেরোবে?
SOLUTION: $T(\sin x) = y_0 + \frac{1}{2}(x^2 - x_0^2) + \int_{x_0}^{x} \sin(t)dt = y_0 + \frac{1}{2}(x^2 - x_0^2) + \cos x_0 - \cos x$.
লক্ষ করো, এই আউটপুটটা আবার x-এর একটা function. আমরা এটাকে $T(\sin)(x)$ বলব, অর্থাৎ আউটপুট function-টার নাম হল $T(\sin)$ এবং x-এ তার value হল $T(\sin)(x)$ এই notation-টা মনে রেখো। যদি ইনপুট function-টা হয় ϕ, তবে তাকে কখনো কখনো যেমন $\phi(x)$ লেখা হয়, তেমনি আউটপুট function-টার নাম দেব $T(\phi)$, যাকে কখনো কখনো $T(\phi)(x)$-ও লিখব। ■

ভালো করে বুঝে নাও যে, (*)-এর সমাধান আর $T(y)$-এর fixed point একই জিনিস। আমরা Banach's fixed point theorem লাগিয়ে দেখাতে চেষ্টা করব T-এর unique fixed point আছে। তার জন্য প্রথম কর্তব্য হল T-এর

[6]নইলে আর $\frac{dy}{dx}$-এর কথা আসছে কী করে?

domain-টা জানা, অর্থাৎ y-এর উপরে কী কী শর্ত চাপালে $T(y)$-টা defined হবে। একটা শর্ত তো আগেই বলেছি, $y(x)$-কে $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$-র উপরে defined হতে হবে। এছাড়া আরো দুটো শর্ত হল--

- $y(x)$-কে continuous হতে হবে (যাতে integration-টা করতে অসুবিধা না হয়),
- $y(x)$ যেন $[y_0 - \beta, y_0 + \beta]$ ছাপিয়ে বেরিয়ে না যায় (কারণ সেক্ষেত্রে $y(x)$-কে $T(x, \cdot)$-এর পেটে ঢোকানো যাবে না)।

তার মানে T-এর domain হল $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ থেকে $[y_0 - \beta, y_0 + \beta]$-তে যাবতীয় continuous function-এর set. ধরো এর নাম দিলাম $\mathcal{D}$. এখন আমরা খেলাচ্ছলে এগোচ্ছি, তাই বেশী খুঁটিনাটি নিয়ে মাথা ঘামাব না। প্রমাণটা গুছিয়ে লেখার সময়ে দেখাব যে, δ-টাকে কায়দা করে নিলে T-এর range-টাও $\mathcal{D}$-এর মধ্যেই থাকবে, অর্থাৎ কোনো $\phi \in \mathcal{D}$ নিলে $T(\phi) \in \mathcal{D}$-ও হবে। এর জন্য δ-র উপরে কী শর্ত চাপাতে হবে, সেটা আমরা একটু পরেই দেখব। আপাততঃ তাহলে ধরে নাও $T : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$.
আমরা Banach's fixed point theorem লাগাতে চাইছি। তার জন্য দুটো শর্ত লাগবে--

- এক, $\mathcal{D}$-কে একটা complete metric space হতে হবে,
- দুই, T-কে একটা contraction map হতে হবে।

প্রথম শর্তটা সহজেই হবে, $\mathcal{D}$-এর উপর sup-metric[7] লাগালেই হল, অর্থাৎ $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{D}$ হলে--

$$d(\phi_1, \phi_2) = \sup\{|\phi_1(x) - \phi_2(x)| \;:\; x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]\}.$$

এই metric-টা লাগালে কেন $\mathcal{D}$ একটা complete metric space হবে, সেটা যদি বুঝতে না পারো, তবে তৃতীয় অধ্যায়ের একটা theorem[8] মনে করিয়ে দিই--যদি $[a, b]$ থেকে $[c, d]$-তে যাবতীয় continuous function-দের set নাও, তবে sup-metric বসালে একটা complete metric space পাওয়া যায়।
এবার দ্বিতীয় শর্তটা, মানে T-এর contraction map হওয়া। এর জন্য যেকোনো $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{D}$ নিয়ে $T(\phi_1)$ আর $T(\phi_2)$-এর মধ্যেকার দূরত্বের সঙ্গে ϕ_1, ϕ_2-এর মধ্যেকার দূরত্বের তুলনা করতে হবে।
এখানে

$$d(T(\phi_1), T(\phi_2)) = \sup\{|T(\phi_1)(x) - T(\phi_2)(x)| \;:\; x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]\}.$$

আমাদের কাজ হল--

$d(T(\phi_1), T(\phi_2)) \le K \cdot d(\phi_1 - \phi_2)$ জাতীয় একটা শর্ত বানানো, যেখানে $K \in [0, 1)$.

এর জন্য $|T(\phi_1)(x) - T(\phi_2)(x)|$ নিয়ে শুরু করা যাক--

$$\begin{aligned} & |T(\phi_1)(x) - T(\phi_2)(x)| \\ = & \left| \int_{x_0}^{x} f(s, \phi_1(s)) - f(s, \phi_2(s)) ds \right| \\ \le & \left| \int_{x_0}^{x} |f(s, \phi_1(s)) - f(s, \phi_2(s))| ds \right| \quad [\text{ by } \Delta\text{-inequality}] \end{aligned}$$

এখানে একটা ছোট্টো প্যাঁচ রয়েছে--

[7]আমরা জানি যে, একটা closed and bounded set-এর উপরে একটা continuous function সর্বদা bounded হয়। তাই sup-টার অস্তিত্ব নিয়ে সন্দেহ নেই। এই কারণেই $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ না নিয়ে $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ নিয়েছিলাম।
[8]Theorem-টা 114 নম্বর পাতায় বা তার ধারেকাছে কোথাও ছিল।

আমরা triangle inequality লাগিয়েছি, কিন্তু তাও বাইরের absolute value-টা রয়েই গিয়েছে। কারণ, আমরা জানি না x-টা x_0-এর চেয়ে বড় নাকি ছোটো। Integral-এর বেলায় triangle inequality-টা ছিল

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx,$$

যদি $a \leq b$ হয়। যদি $a \leq b$ না বলা থাকে, তবে আমাদের লিখতে হবে

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \left|\int_a^b |f(x)|dx\right|.$$

যাই হোক, যে কথা বলছিলাম-- কোনোভাবে যদি $|f(s,\phi_1(s)) - f(s,\phi_2(s))|$-এর জায়গায় $|\phi_1(s) - \phi_2(s)|$ আনা যেত, তবে সুবিধা হত। যদি $f(x,y)$-টা y-এর সাপেক্ষে Lipschitz হয়, তবে সেটা করা যেত অনায়াসেই। এখানে "y-এর সাপেক্ষে Lipschitz" বলতে কী বোঝাচ্ছি, সেটা একটু বিশদ করে লিখি--

DEFINITION: Lipschitz function

A function $f(x,y)$ is called a **Lipschitz function** w.r.t. y (uniformly in x) if

$$\exists L > 0 \quad \forall x, y_1, y_2 \quad |f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L \cdot |y_1 - y_2|.$$

সংজ্ঞাটা অনেকটাই contraction map-এর সংজ্ঞার মত। তবে ওখানে $K \in [0,1)$ ছিল, এখানে $L > 0$. আর ওই "uniformly in x" বলার কারণ L-টা x-এর উপর নির্ভর করে না (লক্ষ করো, $\exists L$-টা রয়েছে $\forall x$-এর আগে)। তবে অনেক জায়গাতেই দেখবে ওই "uniformly in x" কথাটুকু আর লেখে না (যদিও লেখা উচিত)।
আমরা তো এখন গণিতজ্ঞ সেজেছি। তাই যা ইচ্ছে শর্ত ধরে নিতে পারি। অতএব ধরে নেওয়া যাক $f(x,y)$ সত্যিই y-এর সাপেক্ষে Lipschitz. তাহলে পাব--

$$\begin{aligned}
& \left|\int_{x_0}^x |f(s,\phi_1(s)) - f(s,\phi_2(s))|ds\right| \\
\leq\ & \left|\int_{x_0}^x L \times |\phi_1(s) - \phi_2(s)|ds\right|
\end{aligned}$$

এবার লক্ষ করো, যাই x_0 থেকে x-এর মধ্যে যাই s নিই না কেন,
$|\phi_1(s) - \phi_2(s)|$ সর্বদাই $\leq \sup\{|\phi_1(t) - \phi_2(t)| \;:\; t \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]\}$ হবে,
মানে $|\phi_1(s) - \phi_2(s)| \leq d(\phi_1,\phi_2)$ হবে, তাই--

$$\begin{aligned}
\leq\ & d(\phi_1,\phi_2)\left|\int_{x_0}^x L \times ds\right| \\
=\ & L \times |x - x_0| \times d(\phi_1,\phi_2) \\
\leq\ & L \times \delta \times d(\phi_1,\phi_2) \quad [\because x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]]
\end{aligned}$$

প্রায় মেরে এনেছি। ঠিক এরকম জিনিসই দরকার ছিল। Contraction map হবার জন্য এখন খালি $L \times \delta$-টা কোনো < 1 সংখ্যা হলেই হয়। তাহলে চট্ করে বুঝে নিই, δ-র উপর কী কী শর্ত চাপাতে হচ্ছে। একটা শর্ত পেলাম $L\delta < 1$ হতে হবে। এছাড়া আরো দুটো শর্ত আছে। মনে রেখো পুরো গল্পটাই হচ্ছে সেই $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \times [y_0 - \beta, y_0 + \beta]$ টিভির পর্দার মধ্যে। তাই খেয়াল রাখতে হবে যেন আমরা horizontal বা vertical কোনো দিকেই এই rectangle-টা ছাপিয়ে বেরিয়ে না যাই--

- Horizontal দিকে ছাপিয়ে না যাবার জন্য দরকার $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subseteq [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, অর্থাৎ $\delta \leq \alpha$.
- Vertical দিকে $y(x)$ যাতে $[y_0 - \beta, y_0 + \beta]$ ছাপিয়ে বেরিয়ে না যায়, তার জন্যেও δ-র উপর একটা শর্ত আসবে। সেটা প্রমাণের খুঁটিনাটির মধ্যে বলব।

যাক গে, খেলা অনেক হল। এবার সব কিছু গুছিয়ে লিখে একটা theorem বানিয়ে ফেলার সময় এসেছে।

35.2 জবরদস্ত theorem

আগেই বলেছি এই theorem-টার পিছনে চারজন গণিতজ্ঞের অবদান আছে, Cauchy, Lipschitz, Picard এবং Lindelöf. কেউ কেউ theorem-টাকে বলেন Picard-Lindelöf theorem, আবার কেউ কেউ বলেন Cauchy-Lindelöf theorem. চারজনের নাম একসঙ্গে বললেই হত, তবে পাছে বারো-হাত-কাঁকুড়ের-তেরো-হাত-বিচির মত অবস্থা হয় সেই জন্যই বোধহয় লোকে সেটা করে না।

Cauchy-Lindelöf theorem

Let $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Let $\alpha, \beta > 0$ be any two numbers. Let $f(x, y)$ be a continuous function defined over $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \times [y_0 - \beta, y_0 + \beta]$. We assume that f is Lipschitz in y (uniformly over x). We consider the differential equation

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0. \tag{*}$$

Then there exists $\delta > 0$ such that this differential equation has unique solution $y(x)$ defined over $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

Proof:

> By the Lipschitz condition,
>
> $\exists L > 0 \;\; \forall x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \;\; \forall y_1, y_2 \in [y_0 - \beta, y_0 + \beta] \;\; |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$.
>
> Since f is continuous over the compact set $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \times [y_0 - \beta, y_0 + \beta]$, hence it is bounded.
> Let $M > 0$ be a bound.

এইবার আমরা $\delta > 0$ নির্বাচন করতে চলেছি।

> Choose $\delta = \min\left\{\alpha, \frac{1}{2L}, \frac{\beta}{M}\right\} > 0$.

এটা কোথা থেকে এল, বুঝলে কি? সেই যে খেলা করার সময়ে দেখেছিলাম δ-র উপরে তিনটে শর্ত লাগে, তারই ফসল এটা। এর মধ্যে দুজনকে চিনতে পারা উচিত--এক, $\delta \leq \alpha$, যাতে horizontal দিকে টিভির পর্দার বাইরে বেরিয়ে না যায়, আর দুই, $\delta L = \frac{1}{2} < 1$ হয় (contraction map পাওয়ার জন্য এটা দরকার ছিল)। শেষের শর্তটা, মানে $\delta \leq \frac{\beta}{M}$ গ্যারান্টী দিচ্ছে যে vertical দিকেও টিভির পর্দার বাইরে বেরিয়ে যাবে না। তার প্রমাণটা এক্ষুণি আসবে।

Let $\mathcal{D}$ = set of all continuous functions from $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ to $[y_0-\beta, y_0+\beta]$. Then, by standard result, $\mathcal{D}$ is complete under the sup metric given by

$$d(\phi_1,\phi_2) = \sup\{|\phi_1(x)-\phi_2(x)| \ : \ x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]\} \text{ for } \phi_1,\phi_2\in\mathcal{D}.$$

For $\phi\in\mathcal{D}$ we defined $T(\phi)$ as the function

$$T(\phi)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s,\phi(s))ds, \qquad x\in[x_0-\delta,x_0+\delta].$$

Then

- $T(\phi)$ is well-defined, since continuous functions are integrable.
- A function $y(x)$ defined on $[x_0-\delta,x_0+\delta]$ is a solution to (*) iff $T(y)=y$.
- For $\phi\in\mathcal{D}$ we have $T(\phi)$ is continuous.

  ⟦ Because:

  Integrals of continuous functions are continuous.

  ⟧

এইবার আমরা সেই vertical দিকে টিভির বাইরে বেরিয়ে না যাওয়ার শর্তটা দেব।

- Also, for $x\in[x_0-\alpha,x_0+\alpha]$ and $\phi\in\mathcal{D}$ we have $T(\phi)(x)\in[y_0-\beta,y_0+\beta]$.

  ⟦ Because:

  Take any $x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]$. Then

$$\begin{aligned}|T(\phi)(x)-y_0| &= \left|\int_{x_0}^{x} f(s,\phi(s))ds\right| \\ &\leq \left|\int_{x_0}^{x} |f(s,\phi(s))|ds\right| \quad [\text{ by } \Delta\text{-inequality}] \\ &= M\times|x-x_0| \leq M\times\delta\leq\beta.\end{aligned}$$

  আমরা যে δ-কে তিনটে জিনিসের minimum নিয়েছিলাম, তার মধ্যে একটা ছিল $\frac{\beta}{M}$. এখানেই সেটা কাজ লাগল।

  ⟧

অবশেষে contraction map দেখাব--

- T is a contraction map on $\mathcal{D}$ w.r.t. the sup metric.

⟦ <u>Because:</u>

Take any $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{D}$. Take any $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.
Then

$$\begin{aligned}
& |T(\phi_1)(x) - T(\phi_2)(x)| \\
= & \left| \int_{x_0}^{x} f(s, \phi_1(s)) - f(s, \phi_2(s)) ds \right| \\
\leq & \left| \int_{x_0}^{x} |f(s, \phi_1(s)) - f(s, \phi_2(s))| ds \right| \quad [\text{ by } \Delta\text{-inequality}] \\
\leq & \left| \int_{x_0}^{x} L \times |\phi_1(s) - \phi_2(s)| ds \right| \\
\leq & \; d(\phi_1, \phi_2) \times \left| \int_{x_0}^{x} L ds \right| \quad [\because |\phi_(s) - \phi_2(s)| \leq d(\phi_1, \phi_2)] \\
= & \; d(\phi_1, \phi_2) \times L \times |x - x_0| \leq d(\phi_1, \phi_2) \times L \times \delta \leq \frac{1}{2} \times d(\phi_1, \phi_2).
\end{aligned}$$

সেই যে δ-কে তিনটে জিনিসের minimum নিয়েছিলাম,
তার একটা ছিল $\frac{1}{2L}$. সেটাই এখানে বাঁচালো।

$$\begin{aligned}
\therefore \quad & d(T(\phi_1), T(\phi_2)) \\
& = \sup\{|T(\phi_1)(x) - T(\phi_2)(x)| \; : \; x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]\} \\
& \leq \frac{1}{2} \times d(\phi_1, \phi_2).
\end{aligned}$$

⟧

Hence, by Banach's fixed point theorem, there is a unique fixed point of T in $\mathcal{D}$.

So (*) has unique solution over $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

This completes the proof.

[Q.E.D]

প্রমাণটা মোটেই খুব সহজ নয়। তাতে অত দুঃখ নেই, কারণ প্রমাণ তো আর বার বার করতে হচ্ছে না। কিন্তু theorem-টার শর্তটাও বড় বিচ্ছিরি দেখতে। এরকম বিচ্ছিরি শর্ত বিভিন্নক্ষেত্রে বার বার পরীক্ষা করে দেখা চাপের। তাই এবার theorem-টার একটা দুর্বলতর সংস্করণ বলব, যেটা দুর্বলতর হলেও ব্যবহার করার ক্ষেত্রে অনেক সহজ।

THEOREM

Let $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Let $\alpha, \beta > 0$ be any two number. Let $f(x,y)$ be a continuous function defined over $[x_0-\alpha, x_0+\alpha] \times [y_0-\beta, y_0+\beta]$. We assume that $\frac{\partial f}{\partial y}$ is also continuous. We consider the differential equation

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0.$$

Then there exists $\delta > 0$ such that this differential equation has unique solution $y(x)$ defined over $[x_0-\delta, x_0+\delta]$.

Proof: এই theorem-টা দেখতে একেবারেই আগের theorem-টার মতই, খালি ওখানকার Lipschitz শর্তটার বদলে এখানে $\frac{\partial f}{\partial y}$-এর continuity ধরা হয়েছে। প্রমাণ করার জন্য খালি দেখাতে হবে যে এই continuity শর্তটা পালিত হলেই আগের theorem-এর Lipschitz শর্তটাও পালিত হতে বাধ্য। ব্যস্, তারপর আগের theorem-টা লাগিয়ে দিলেই হল।

Step 1: Shall show that f must be Lipschitz w.r.t. y (uniformly in x), ie,

$$\exists L > 0 \quad \forall x \in [x_0-\alpha, x_0+\alpha] \quad \forall y_1, y_2 \in [y_0-\beta, y_0+\beta] \quad |f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L \cdot |y_1 - y_2|.$$

এখানে $\frac{\partial f}{\partial y}$-কে continuous ধরেছি একটা compact set-এর উপরে। তাই $\frac{\partial f}{\partial y}$-টা bounded হবে। ধরা যাক $M > 0$ হল একটা bound. সুতরাং y বদলালে $f(x,y)$-এর পরিবর্তনের হার M-এর চেয়ে বেশী হতে পারে না। সুতরাং--

Since $\frac{\partial f}{\partial y}$ is continuous over the compact set $[x_0-\alpha, x_0+\alpha] \times [y_0-\beta, y_0+\beta]$, hence $\frac{\partial f}{\partial y}$ must be bounded there.

Let $L > 0$ be such a bound.

$\exists L$ Choose this L.

তাহলে mean value theorem-এর খেলা--

$\forall x$ Take any $x \in [x_0-\alpha, x_0+\alpha]$.

$\forall y_1, y_2$ Take any $y_1, y_2 \in [y_0-\beta, y_0+\beta]$.

Then

$$\begin{aligned} |f(x,y_1) - f(x,y_2)| &= \frac{\partial f(x,\xi)}{\partial y} \times |y_1 - y_2| \text{ for some } \xi \text{ between } y_1 \text{ and } y_2 \\ &\qquad \text{by mean value theorem} \\ &\leq L \cdot |y_1 - y_2|, \end{aligned}$$

as required.

ব্যস্, এবার খালি আগের theorem-টা লাগানোর অপেক্ষা--

Step 2: Now this theorem follows from the last theorem.

[Q.E.D]

Answers

1. নাই হতে পারে, যেমন $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ যেখানে $f(x) = 2x$. **2.** $f(x) = \frac{|x|}{2}$. **3.** হ্যাঁ, কারণ $|\sin x| \leq \sin 1 < 1$. **4.** এখানে $y_n(x) = c\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right) + \frac{x^n}{n!}$ হবে। যেকোনো $x \in \mathbb{R}$-এর জন্যই $\frac{x^n}{n!} \to 0$ হয়।

Index